AL110 - Algebra 1 - A.A. 2015/2016
Appello X (Settembre 2016)

Matricola (O ALTRO IDENTIFICATIVO) $\rightarrow$ [ ]

Cognome: .... **Nome:** ....

---

esercizio	1.1	1.2	1.3	2.1	2.2	2.3	3.1	3.2	3.3
punti max	2	3	3	3	4	4	3	3	3
valutazione									

AVVERTENZE:

– *Svolgere gli esercizi in modo conciso, ma esauriente, nello spazio assegnato.*
La soluzione degli esercizi deve essere scritta negli appositi spazi bianchi di questo fascicoletto. **NON si accettano altri fogli**.

– *Fino a* **due punti ulteriori (bonus)** *potranno essere assegnati agli elaborati scritti in modo molto chiaro.*

– *Fino a* **due punti (malus)** *potranno essere tolti agli elaborati scritti in modo confuso o difficilmente leggibile.*

LEGGERE LE AVVERTENZE

NON SFOGLIARE IL TESTO

PRIMA CHE VENGA DATO UFFICIAMENTE INIZIO ALLA PROVA DAL DOCENTE

ESERCIZIO 1. Sia X un insieme non vuoto e sia $\mathcal{P}(X)$ l'insieme delle parti di X. Sia Y un sottoinsieme di X fissato e sia $\boxplus$ l'operazione in $\mathcal{P}(X)$ definita nella maniera seguente, presi comunque $A, B \in \mathcal{P}(X)$:

$$A \boxplus B := (A \cup B) \setminus (A \cap B) \,.$$

(1) Stabilire se l'applicazione $\varphi_Y : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$, definita da $\varphi_Y(A) := A \boxplus Y$, per ogni $A \in \mathcal{P}(X)$, è biiettiva.

(2) Si definisca una relazione ρ_Y nell'insieme $\mathcal{P}(X)$ nella maniera seguente:

$$A \ \rho_Y \ B \quad :\Leftrightarrow \quad A \boxplus Y \subseteq B \boxplus Y \,.$$

Stabilire se ρ_Y è una relazione di ordine in $\mathcal{P}(X)$ e, in caso affermativo, se è una relazione di ordine totale.

(3) Rispetto alla relazione ρ_Y definita in (2) stabilire se in $\mathcal{P}(X)$ esistono elementi massimali o/e minimali e massimo o/e minimo.

SOLUZIONE ESERCIZIO 1, Cenni (1) φ_Y è biiettiva con applicazione inversa φ_Y, dal momento che $Y \boxplus Y = \emptyset$ e quindi $\varphi_Y \circ \varphi_Y(A) = A$, per ogni $A \in \mathcal{P}(X)$.

(2) La relazione data è riflessiva, transitiva. E' anche antisimmetrica perché $Y \boxplus Y = \emptyset$ e perciò $A \boxplus Y = B \boxplus Y$ implica che $A = A \boxplus (Y \boxplus Y) = (A \boxplus Y) \boxplus Y = (B \boxplus Y) \boxplus Y = B \boxplus (Y \boxplus Y) = B$. Non è totale se X contiene almeno due elementi distinti a, b con $a, b \in Y$ oppure $a, b \in X \setminus Y$. In tal caso, $A := \{a\}$ e $B := \{b\}$ sono inconfrontabili.

(3) $(\mathcal{P}(X), \rho_Y)$ possiede un massimo (unico elemento massimale) $X \setminus Y$ ed un minimo (unico elemento minimale) Y .

ESERCIZIO 2. Sia $\mathbb{F}_3 := \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

(1) Determinare tutti gli eventuali elementi $a \in \mathbb{F}_3$ per i quali l'anello quoziente
$$K_a := \mathbb{F}_3[T]/(aT^3 + T^2 + 1)$$
è un campo.

(2) Per ciascun elemento a per il quale K_a è un campo, mostrare che il polinomio $aT^3 + T^2 + 1$ ha tutte le sue radici in K_a (cioè, $aT^3 + T^2 + 1$ in K_a si fattorizza come prodotto di polinomi lineari).

(3) Per ciascun elemento a per il quale K_a è un campo, studiare la struttura dei gruppi $(K_a, +)$ e $(K_a^*, \cdot)$ (dove $K_a^* := K_a \setminus \{0\}$).

SOLUZIONE ESERCIZIO 2, Cenni

(1) Il polinomio $f_a := aT^3 + T^2 + 1$ ha grado minore od uguale a 3, pertanto è irriducibile se e soltanto se non ha radici in $\mathbb{F}_3$. Denotiamo semplicemente con $0, 1, 2$ gli elementi di $\mathbb{F}_3$.

Per $a = 0$, $f_a := T^2 + 1$ è irriducibile in $\mathbb{F}_3[T]$.

Per $a = 1$, $f_a := T^3 + T^2 + 1$ è riducibile in $\mathbb{F}_3[T]$ (1 è una sua radice).

Per $a = 2$, $f_a := 2T^3 + T^2 + 1$ è riducibile in $\mathbb{F}_3[T]$ (2 è una sua radice).

(2) Per $a = 0$, $K_a = \{\alpha + \beta\zeta \mid \alpha, \beta \in \mathbb{F}_3, \zeta := T + (T^2 + 1)\}$. In tal caso ζ e 2ζ sono le radici del polinomio T^2+1 in K_a (infatti $(T-\zeta)(T-2\zeta) = T^2 - 3\zeta T + 2\zeta^2 = T^2 - 2 = T^2 + 1$).

(3) $(K_a, +)$ è un gruppo con 9 elementi isomorfo a $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. $(K_a^*, \cdot)$ è un gruppo ciclico con 8 elementi.

ESERCIZIO 3. Sia $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ l'applicazione definita da $\varphi(a+ib) := (a-b, b)$, presi comunque $a, b \in \mathbb{R}$ e sia $\psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ l'applicazione definita da $\psi(\alpha, \beta) := (0, \alpha + \beta)$, presi comunque $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(1) Stabilire se φ è un'applicazione biiettiva, se φ è un omomorfismo tra gruppi additivi (dove $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ è un gruppo additivo con la struttura di prodotto diretto di gruppi), e se φ è un omomorfismo tra anelli (dove $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ è un anello con la struttura di prodotto diretto di anelli).

(2) Stabilire se ψ è un'applicazione iniettiva o/e suriettiva, se ψ è un omomorfismo tra gruppi, e se ψ è un omomorfismo tra anelli.

(3) Verificare che $\psi \circ \varphi$ è un omomorfismo di gruppi additivi, ma non di anelli. Calcolare $\mathrm{Ker}(\psi \circ \varphi)$.

SOLUZIONE ESERCIZIO 3, Cenni

(1) φ è un'applicazione biiettiva. Inoltre, φ è un omomorfismo di gruppi addidivi ma non di anelli.

(2) ψ è un'applicazione che non è né iniettiva né suriettiva. ψ è un omomorfismo di gruppi addidivi ma non di anelli.

(3) $\mathrm{Ker}(\psi \circ \varphi) = \{bi \mid b \in \mathbb{R}\}$.

RIPETERE Matricola (o altro identificativo) $\rightarrow$

Cognome: .... **Nome:** ....

esercizio	4.1	4.2	4.3	4.4	5.1a	5.1b	5.2	5.3	6
punti max	2	4	4	3	3	3	4	4	12
valutazione									

ESERCIZIO 4. Siano A un anello (commutativo con unità), e sia $B := A \times A$ l'anello prodotto diretto di A con sé stesso, le cui operazioni sono definite, a partire da quelle di A, componente per componente. Fissato un ideale $\mathfrak{I}$ di A, si ponga

$$A(\mathfrak{I}) := \{(a, a+i) \mid a \in A, i \in \mathfrak{I}\}.$$

(1) Si dimostri che $A(\mathfrak{I})$ è un sottoanello di B.
(2) Si stabilisca se $A(\mathfrak{I})$ è un ideale di B.
(3) Si dica per quali anelli A e per quale/i ideale/i $\mathfrak{I}$ di A l'anello $A(\mathfrak{I})$ è un dominio di integrità.
(4) Nel caso $A := \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ e $\mathfrak{I} := [3]_6 A$, si trovino gli invertibili di $A(\mathfrak{I})$ e i divisori dello zero di $A(\mathfrak{I})$.

SOLUZIONE ESERCIZIO 4, Cenni

(1) La verifica è di routine. Innanzitutto $A(\mathfrak{I})$ è non vuoto, contenendo ovviamente $(0,0)$. Siano $(a, a+i), (b, b+j) \in A(\mathfrak{I})$ (dunque, $a, b \in A, i, j \in \mathfrak{I}$). Si ha

$$(a, a+i) - (b, b+j) = (a-b, a-b+(i-j)) \in A(\mathfrak{I})$$
$$(a, a+i)(b, b+j) = (ab, ab+aj+bi+ij) \in A(\mathfrak{I})$$

in quanto, essendo $\mathfrak{I}$ un ideale di A, $i-j, aj+bi+ij \in \mathfrak{I}$.

(2) Osserviamo innanzitutto che $A(\mathfrak{I}) = \{(x,y) \in B \mid x - y \in \mathfrak{I}\}$. Se $\mathfrak{I} \neq A$ allora $A(\mathfrak{I})$ non è un ideale di B. Infatti, sia $a \in A \setminus \mathfrak{I}$. L'elemento (a,a) appartiene, ovviamente a $A(\mathfrak{I})$, ma $(a,0) = (a,a)(1,0) \notin A(\mathfrak{I})$. Se invece $\mathfrak{I} = A$, allora $A(\mathfrak{I}) = B$ e quindi è un ideale di B.

(3) Se $A(\mathfrak{I})$ è un dominio, allora A è un dominio. Infatti, dati $a, b \in A$, da $ab = 0$ segue $(a,a)(b,b) = (0,0)$ nel dominio $A(\mathfrak{I})$ e quindi $(a,a) = (0,0)$ oppure $(b,b) = (0,0)$, da cui la conclusione. Inoltre, se $A(\mathfrak{I})$ è un dominio, allora $\mathfrak{I} = \{0\}$. Infatti, dato un elemento $i \in \mathfrak{I}$, gli elementi $(i,0), (0,i)$ appartengono a $A(\mathfrak{I})$ e $(i,0)(0,i) = (0,0)$. Dal fatto che $A(\mathfrak{I})$ è un dominio segue $(i,0) = (0,0)$ oppure $(0,i) = (0,0)$, e in entrambi i casi si deduce $i = 0$. Viceversa, se A è un dominio e $\mathfrak{I} = \{0\}$ allora $A(\mathfrak{I})$ è un dominio. Infatti, se $\mathfrak{I} = \{0\}$, la funzione $A \longrightarrow A(\mathfrak{I})$, $a \mapsto (a,a)$ è un isomorfismo di anelli.

(4) Gli invertibili di $A(\mathfrak{I})$ sono $(1,1), (5,5)$. I divisori dello zero sono

$$(0,0), (0,3), (1,4), (2,2), (3,3), (3,0), (4,4).$$

Le verifiche sono standard e vengono lasciate al lettore.

ESERCIZIO 5. Il candidato affronti le seguenti questioni.

(1) Siano $(G, \cdot)$ un gruppo e $x, y \in G$.
  - **(a)** Si dimostri che, per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, si ha $(xyx^{-1})^n = xy^n x^{-1}$.
  - **(b)** Sapendo che $xyx^{-1} = y^2$, si calcoli $x^n y x^{-n}$, per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

(2) Si determini la fattorizzazione del polinomio $f(T) := 6T^4 + 9T^3 + 3T^2 + 2T + 1 \in \mathbb{Z}[T]$ come prodotto di polinomi irriducibili in $\mathbb{Q}[T]$.

(3) Si determinino tutti e soli i possibili gradi di un polinomio a coefficienti reali che abbia fra le sue radici i numeri complessi i, $i + 1$.

SOLUZIONE ESERCIZIO 5, Cenni

(1) **(a)** Per induzione su n. Essendo l'asserzione banale per $n = 1$, assumiamo $n \geq 1$ e che valga $(xyx^{-1})^n = xy^n x^{-1}$. Si ha

$$(xyx^{-1})^{n+1} = (xyx^{-1})^n xyx^{-1} = xy^n x^{-1} xyx^{-1} = xy^{n+1} x^{-1}.$$

(b) Proviamo, per induzione su n, che se $xyx^{-1} = y^2$, allora $x^n y x^{-n} = y^{2^n}$. Essendo l'asserzione banale per $n = 1$, assumiamo $n \geq 1$ e che valga $x^n y x^{-n} = y^{2^n}$. Si ha, tenendo conto della parte **(a)**,

$$x^{n+1} y x^{-n-1} = x(x^n y x^{-n})x^{-1} = xy^{2^n} x^{-1} = (xyx^{-1})^{2^n} = (y^2)^{2^n} = y^{2^{n+1}}.$$

(2) Si ha $f(T) = (2T+1)(3T^3+3T^2+1)$. Il secondo polinomio è irriducibile in $\mathbb{Z}[T]$ e in $\mathbb{Q}[T]$, in virtù della versione reciproca del Teorema di Eisenstein.

(3) Ricordiamo che, se un polinomio a coefficienti reali ha una radice complessa α, allora ha fra le sue radici anche il coniugato di α. Ne segue che un polinomio che abbia fra le sue radici $i, i+1$ ha anche fra le sue radici $-i, 1-i$. Dunque un siffatto polinomio è divisibile, in $\mathbb{R}[T]$, per $(T^2+1)(T^2-2T+2)$ e il suo grado potrà quindi assumere ogni valore intero ≥ 4.

ESERCIZIO 6. Il piccolo Epsilon e la sua amata Delta decidono di trascorrere parte di una serata giocando nel seguente modo:

− uno dei due dice un numero intero da 1 a 10, l'altro dice la somma del numero detto dal primo e un numero intero da 1 a 10;

− il primo giocatore, a sua volta, dice la somma fra la somma detta dal precedente giocatore e un numero intero da 1 a 10, e così via.

Vince il giocatore che dice per primo 2016^{10}.

Il piccolo Epsilon dà alla sua amata Delta la possibilità di iniziare a giocare per prima. La dolce e intelligentissima Delta ne è assai lieta in quanto sa di possedere una strategia vincente.

Si illustri la strategia vincente ideata da Delta.

⋆ ⋆ ⋆

... Infine, una breve riflessione dell'autore dell'Esercizio 6 (C. A. F.)

Questa prova di esame è l'ultima tappa di un lungo percorso iniziato molti anni fa. Per questo motivo ruberò qualche istante ai lettori per esprimere qualche riflessione.
Innanzitutto ringrazio gli allievi, che hanno accettato in questi lunghi anni il mio carattere e la severità, che comunque è stata sempre bonaria; li ringrazio perché il confronto con molti di loro mi ha fatto crescere umanamente e ha dato sfumature di colori vivi e ben presenti nella mia memoria all'attività, spesso estraniante e solitaria, di chi, come me, si occupa di ricerca. Esprimo di cuore riconoscenza nei confronti del mio amico e Maestro, Marco Fontana, per aver condiviso con entusiasmo questa lunga avventura insieme, durante la quale abbiamo immaginato questo corso come una sorta di "palestra della dimostrazione" dove l'intuizione e la fantasia affermano il loro primato sulle regole, cosa che speriamo abbia reso la materia trattata più affascinante e, perché no, anche più umana. Corollario di ciò è stato il proporre, di tanto in tanto, esercizi pur semplicissimi ma un po' stravaganti, come l'Esercizio 6 (che chiude questo scorcio di vita accademica del suo autore), nel quale, per l'ultima volta, appaiono il "il piccolo Epsilon e la sua amata Delta".
Questo esercizio nasce alla fine del mese di aprile di quest'anno, a valle di una fra le centinaia di conversazioni che ho avuto con una persona, che ringrazio per tutto dal profondo, molto lontana ma unita a me per sempre nello spirito e nella condivisione, fra le molte, molte altre cose, del "gusto del bello" e che, per entusiasmo, competenza e talento meriterebbe, e di gran lunga, di stare a lezione al mio posto (e non soltanto ad Algebra 1!). Viene menzionata in questa riflessione perché a lei si devono alcune idee didattiche e lo stile che speriamo abbiano "spettinato", come sa fare la brezza d'estate, le esercitazioni rendendole libere da ogni impalcatura libresca, e ispirazioni per esercizi che ci auguriamo abbiano indotto gli allievi a prendere la disciplina un po' meno sul serio, almeno col sorriso sulle labbra, e a vedere, apprezzare e condividere (quando saranno insegnanti) quel gusto per la sfida con cui chi sta scrivendo spesso concludeva a lezione una questione dicendo "Abbiamo vinto!".

SOLUZIONE ESERCIZIO 6, Cenni

La dolce e intelligentissima Delta conosce l'enunciato del Piccolo Teorema di Fermat, e ne deduce che il resto di 2016^{10} *nella divisione per 11 è 1, i.e., il numero* 2016^{10} *è della forma* $11k+1$*, per qualche intero positivo* k*. Dunque Delta sa che per vincere è sufficiente che lei dica tutti i numeri del tipo* $11h+1$*, con* $h \in \mathbb{N}$*. Siccome è la prima a giocare inizia col dire il numero 1. Sia* x *il numero scelto da Epsilon; dunque il numero che Epsilon dirà è* $1+x$*. In virtù delle regole del gioco,* $x \in \{1, \ldots, 10\}$*, e quindi* $d := 12-(1+x)$ *è un numero intero compreso fra 1 e 10. Dunque Delta è legittimata a scegliere il numero* d*, lo somma a quello detto da Epsilon,* $1+x$*, e dirà quindi* $12 (= 11 \cdot 1 + 1)$*. Questo argomento permette a Delta di applicare facilmente il Principio di Induzione e dedurre che potrà dire, indipendentemente dalle scelte del suo piccolo Epsilon, ogni numero del tipo* $11h+1$ *e, in particolare,* 2016^{10}.