AL110 - Algebra 1 - A.A. 2015/2016
Valutazione "in itinere" - I Prova (Novembre 2015)

Matricola (O ALTRO IDENTIFICATIVO) $\rightarrow$ ____________

Cognome: .... **Nome:** ....

---

esercizio	1.1	1.2	2.1	2.2	3.1	3.2	3.3
punti max	5	10	6	10	2	4	4
valutazione							

esercizio	4.1	4.2	4.3	5.1	5.2a	5.2b	5.2c	6.1	6.2a	6.2b
punti max	4	5	12	8	3	6	7	4	5	10
valutazione										
TOTALE $\rightarrow$					*"bonus"* $\rightarrow$					

AVVERTENZE:
– *Svolgere gli esercizi in modo conciso, ma esauriente, nello spazio assegnato.*
– *Utilizzare soltanto gli spazi bianchi di questo fascicolo per lo svolgimento degli esercizi: NON si accettano altri fogli.*
– *Fino a* **due punti ulteriori (bonus)** *potranno essere assegnati agli elaborati scritti in modo molto chiaro.*
– *Fino a* **due punti (malus)** *potranno essere tolti agli elaborati scritti in modo confuso o difficilmente leggibile.*
– *Un* **bonus del 5% di punti ottenuti** *potrà essere assegnato a coloro che consegneranno l'elaborato entro la prima scadenza fissata dai docenti.*

LEGGERE LE AVVERTENZE
NON SFOGLIARE IL TESTO
PRIMA CHE VENGA DATO UFFICIAMENTE
INIZIO ALLA PROVA DAL DOCENTE

⋆ ⋆ ⋆

ESERCIZIO 1. Sia $X := \{x, y, z, w\}$ e siano

$$R := \{(x, y), (y, y)(z, x), (w, y)\} \quad \text{e} \quad S := \{(x, x), (x, y), (x, z), (z, z), (y, w)\}$$

due relazioni sull'insieme X.

(1) Determinare esplicitamente gli elementi di ciascuna delle seguenti relazioni:

(a) $R \cap S = \{(x, y)\}$.
(b) $R \cup S = \{(x, x), (x, y), (x, z), (y, y), (y, w), (z, x), (z, z), (w, y)\}$.
(c) $R^{-1} = \{(y, x), (y, y), (x, z), (y, w)\}$.
(d) $R \cdot S = \{(x, w), (y, w), (w, w), (z, x), (z, y), (z, z)\}$.
(e) $S \cdot R = \{(x, y), (x, x), (z, x), (y, y)\}$.

(2) Per ciascuna delle cinque relazioni su X considerate in **(1)**, stabilire se essa è Riflessiva **(R)**, Simmetrica **(S)**, Antisimmetrica **(AS)**, Transitiva **(T)**, Totale **(TT)**.

(a) $\neg$**(R)**, $\neg$**(S)**, **(AS)**, **(T)**, $\neg$**(TT)**.
(b) $\neg$**(R)**, $\neg$**(S)**, $\neg$**(AS)**, $\neg$**(T)**, $\neg$**(TT)**.
(c) $\neg$**(R)**, $\neg$**(S)**, **(AS)**, $\neg$**(T)**, $\neg$**(TT)**.
(d) $\neg$**(R)**, $\neg$**(S)**, **(AS)**, $\neg$**(T)**, $\neg$**(TT)**.
(e) $\neg$**(R)**, $\neg$**(S)**, **(AS)**, $\neg$**(T)**, $\neg$**(TT)**.

ESERCIZIO 2. **(1)** Siano A, B e C tre insiemi. Verificare quali delle seguenti proprietà sono vere (dimostrare quelle vere e trovare un controesempio per quelle false):

(a) $A \cup (B \setminus C) \subseteq (A \cup B) \setminus C$.
(b) $(A \setminus (B \cup C)) \cap ((A \setminus B) \cap (A \setminus C)) \neq \emptyset$.

(2) Nell'insieme di tutti gli studenti delle scuole superiori italiane, si supponga che il **45%** degli studenti sia interessato alla discipline scientifiche e il **35%** sia interessato alla discipline umanistiche.

Dare una stima (una "forchetta") della percentuale di studenti che *non* sono interessati *né* alla discipline scientifiche *né* alla discipline umanistiche.

(2.1, a) Falsa. Si prendano ad esempio $A := \{a, b\}$, $B =: \{b, c\}$, $C := \{a, c\}$ e si noti che $A \cup (B \setminus C) = A$ e $(A \cup B) \setminus C = \{b\}$.

In effetti, si può dimostrare che è sempre vera l'inclusione opposta, cioè che $A \cup (B \setminus C) \supseteq (A \cup B) \setminus C$.

(2.1, b) Vera *se* $A \setminus (B \cup C) \neq \emptyset$; altrimenti è banalmente falsa. Per ogni sottoinsieme Y di A, poniamo $Y' := A \setminus Y$. Allora, $A \setminus (B \cup C) = (B \cup C)' =^{\star} B' \cap C' = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.
($\star$: $(B \cup C)' \subseteq B'$ e $(B \cup C)' \subseteq C'$, quindi $(B \cup C)' \subseteq B' \cap C'$. Se $x \notin B$ e $x \notin C$, allora $x \notin B \cup C$. Quindi, $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$).

(2.2) Per esempio si può procedere in questo modo: indichiamo con X l'insieme degli studenti delle scuole superiori, con S l'insieme degli studenti interessati materie scientifiche, con U l'insieme degli studenti interessati alle materie umanistiche. Poniamo Card(X)= 100, Card(S)= 45, Card(U)= 35, $S' = X \setminus S$ e $U' = X \setminus U$. Quindi, Card(S') = 55 e Card(U') = 65. Vogliamo stimare Card($S' \cap U'$). Sappiamo che Card($S' \cup U'$) = Card(S') + Card(U') - Card($S' \cap U'$) e che 65 = Card(U') $\leq$ Card($S' \cup U'$) $\leq$ Card(X) = 100. Quindi

20 = 55 + 65 - 100 $\leq$ Card($S' \cap U'$) $\leq$ 55 + 65 - 65 = **55**.

ESERCIZIO 3. **(1)** Scrivere in base 10 i seguenti due numeri scritti in base 5:

$$a := (132)_5 \,, \quad b := (1342)_5 \,.$$

(2) Scrivere in base 5 ed in base 2 i numeri

$$a + b \quad \text{e} \quad a{\cdot}b$$

(spiegando brevemente il procedimento seguito).

(3) Utilizzando le tabelle di verità, mostrare che $\neg(P \Rightarrow Q)$ è logicamente equivalente a $P \wedge \neg Q$.
Enunciare una proposizione equivalente alla negazione della seguente proposizione:
Se il Sindaco non si dimette allora gli elettori non vanno alle urne.

(3.1)

$$a := (132)_5 = (42)_{10} \,, \quad b := (1342)_5 = (222)_{10} \,.$$

(3.2)

$$a{+}b := (264)_{10} = (2024)_5 = (100001000)_2 \,, \quad ab := (9324)_{10} = (244244)_5 = (10010001101100)_2 \,.$$

(3.3) La prima parte è un'ovvia verifica.
Si applichi la prima parte nel caso P = "il Sindaco non si dimette" e Q = gli elettori non vanno alle urne". Pertanto, la negazione è: *Il Sindaco non si dimette* **e** *gli elettori vanno alle urne.*

RIPETERE Matricola (o altro identificativo) $\rightarrow$ ☐

Cognome: .... **Nome:** ....

ESERCIZIO 4. Il candidato risolva le seguenti questioni, con un argomento conciso ed esauriente.

(1) Si calcoli il $\mathrm{MCD}(320, 71)$, determinando inoltre una identità di Bézout ad esso relativa.

(2) Al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{Z}$, si discuta la risolubilità dell'equazione diofantea
$$2\lambda X + (2016\lambda + 1)Y = 1$$
nelle indeterminate intere X, Y, determinando, quando esistono, le sue soluzioni.

(3) Si dica quanti e quali sono i numeri primi della forma $n^4 + 4^n$ (dove è un intero positivo).
[Suggerimento: potrebbe essere utile osservare che, se n è un numero dispari, allora $2^{n+1}n^2$ è un quadrato perfetto ... ☺]

(1) Si ha con facili calcoli $\mathrm{MCD}(320, 71) = 1$, e una identità di Bezout è $2 \cdot 120 - 9 \cdot 71 = 1$.

(2) L'equazione diofantea assegnata è risolubile per ogni $\lambda \in \mathbb{Z}$. Infatti, dal fatto che $-1008 \cdot 2\lambda + 2016\lambda + 1 = 1$ segue immediatamente che $\mathrm{MCD}(2\lambda, 2016\lambda + 1) = 1$. Pertanto, tutte e sole le soluzioni dell'equazione sono del tipo $(X, Y) = (-1008 + (2016\lambda + 1)t, 1 - 2\lambda t)$, con $t \in \mathbb{Z}$ arbitrario.

(3) Se n è un numero pari, allora è ovvio che $n^4 + 4^n$ non è primo, essendo divisibile per 2 e distinto da 2. Se n è dispari, mostriamo che $n^4 + 4^n$ è un numero primo se e soltanto se $n = 1$. Si ha
$$n^4 + 4^n = n^4 + 4^n + 2^{n+1}n^2 - 2^{n+1}n^2 = (n^2 + 2^n)^2 - 2^{n+1}n^2.$$
Poiché $n+1$ è pari, l'ultimo addendo è un quadrato perfetto e così si ottiene immediatamente
$$n^4 + 4^n = (n^2 + 2^n - 2^{\frac{n+1}{2}}n)(n^2 + 2^n + 2^{\frac{n+1}{2}}n)$$
Tale fattorizzazione è banale se e solo se $n = 1$, i.e., se $n^4 + 4^n = 5$.

ESERCIZIO 5. Dato un numero complesso $z := a + ib$, con $a, b \in \mathbb{R}$, indichiamo, come usuale, con $|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$ il suo modulo e con $\overline{z} := a - ib$ il suo coniugato. Denotiamo inoltre con $\Re(z)$ (risp., $\Im(z)$) la parte reale (risp., immaginaria) di z, i.e., $\Re(z) := a$, $\Im(z) := b$, quindi, $z = \Re(z) + i\Im(z)$.

(1) Si determinino i seguenti insiemi (sottoinsiemi di $\mathbb{C}$):

$$\boldsymbol{X} := \{z \in \mathbb{C} \mid z^2 = 2i(\Re(z))^2\}, \qquad \boldsymbol{Y} := \{z \in \mathbb{C} \mid \overline{z}^2 + |z|^2 - 6\overline{z} = 0\},$$

$$\boldsymbol{S} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\},$$

e si rappresenti ciascuno di essi sul piano di Argand-Gauss.

(2) Si definisca adesso su $\mathbb{C}$ la relazione binaria $\preceq$ ponendo

$$z \preceq w \;:\Longleftrightarrow\; [(\Re(z) \leq \Re(w)) \wedge (\Im(z) \leq \Im(w))]$$

e si dia per buono che $\preceq$ è un ordine parziale su $\mathbb{C}$.

(a) Si dica se $(\mathbb{C}, \preceq)$ è totalmente ordinato e/o ben ordinato.

(b) Si determinino eventuali elementi massimali e/o minimali di $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{S}$.

(c) Si determinino eventuali estremo superiore e inferiore di $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{S}$ in $\mathbb{C}$, precisando se si tratta di massimo o minimo.

(1) Si ha $\boldsymbol{X} = \{x + xi \mid x \in \mathbb{R}\}$, $\boldsymbol{Y} := \{0\} \cup \{3 + ai \mid a \in \mathbb{R}\}$, $\boldsymbol{S}$ si identifica con la circonferenza unitaria centrata nell'origine.

(2) **(a)** $(\mathbb{C}, \preceq)$ non è totalmente ordinato perché per esempio, $1 + i, 2 - i$ non sono comparabili. A fortiori, $(\mathbb{C}, \preceq)$ non è ben ordinato.

(b) $\boldsymbol{X}$ è totalmente ordinato (infatti $x + ix \preceq y + iy$ se e solo se $x \leq y$) e non ha elementi minimali né massimali. $\boldsymbol{Y}$ ha 0 come elemento minimale e nessun elemento massimale. Per $\boldsymbol{S}$ gli elementi massimali sono quelli della forma $\cos(x) + i\,\mathrm{sen}(x)$, con $x \in [0, \pi/2]$, quelli minimali sono del tipo $\cos(y) + i\,\mathrm{sen}(y)$, con $y \in [\pi, 3\pi/2]$.

(c) $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ non hanno né estremo superiore né estremo inferiore. L'estremo superiore di $\boldsymbol{S}$ in $\mathbb{C}$ è $1 + i$ e non è massimo, l'estremo inferiore è $-1 - i$ e non è minimo.

ESERCIZIO 6. Utilizzando una delle forme (fra loro equivalenti) del Principio di Induzione, il candidato affronti le seguenti questioni.

(1) Si mostri che, per ogni $n \geq 1$, il numero naturale $6^n - 1$ è divisibile per 5.

(2) Sia $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ la successione dei numeri del Fibonacci, i.e.,

$$u_0 := 0, u_1 := 1, u_n := u_{n-1} + u_{n-2}, \qquad \text{per ogni } n \geq 2.$$

(a) Si dimostri che, presi comunque interi positivi n, h, si ha

$$u_{h+n-1} = u_h u_n + u_{h-1} u_{n-1}.$$

[Suggerimento: sia $p(n)$ la proposizione logica: "Vale l'uguaglianza $u_{h+n-1} = u_h u_n + u_{h-1} u_{n-1}$, per ogni $h \geq 1$" ... ☺]

(b) Si dimostri che, se n, m sono interi positivi tali che n divide m, allora u_n divide u_m.
[Suggerimento: equivalentemente, bisogna mostrare che, presi comunque $n, k \geq 1$, u_n divide u_{kn}. Si proceda per induzione su... ☺]

(1) Per $n = 1$ l'asserzione è ovvia. Sia $n \geq 1$ e si assuma che 5 divida $6^n - 1$, diciamo $6^n - 1 = 5m$, per qualche intero m. Allora si ha

$$6^{n+1} - 1 = 6 \cdot 6^n - 6 + 6 - 1 = 6(6^n - 1) + 5 = 6 \cdot 5m + 5,$$

i.e., $6^{n+1} - 1$ è divisibile per 5.

(2) **(a)** Proviamo l'asserzione per Ampia Induzione su n. Essa è palesemente vera, quando $n = 1$ o $n = 2$, per ogni $h \geq 1$. Fissiamo adesso $n \geq 2$ e supponiamo che risulti

$$u_{h+k} = u_h u_{k+1} + u_{h-1} u_k$$

per ogni $1 \leq k \leq n - 1$. Si ha

$$u_{h+n} := u_{h+n-1} + u_{h+n-2}.$$

Per l'ipotesi di Ampia Induzione, si ha

$$u_{h+n-1} + u_{h+n-2} = u_h u_n + u_{h-1} u_{n-1} + u_h u_{n-1} + u_{h-1} u_{n-2} = u_h u_{n+1} + u_{h-1} u_n$$

L'asserzione segue dunque dal Principio di Ampia Induzione.

(b) Fissato $n \geq 1$, vogliamo mostrare che u_n divide u_{nk}, per ogni intero positivo k. Mostriamo l'asserzione per induzione su k. Essa è del tutto banale se $k = 1$ (in tale caso $u_{kn} = u_n$). Supponiamo allora $k \geq 1$ e assumiamo di aver mostrato che u_n divida u_{kn}, diciamo $u_{kn} = a u_n$, per qualche intero a, e dimostriamo che u_n divide $u_{(k+1)n}$. In virtù della parte **(a)** e dell'ipotesi induttiva, si ha

$$u_{(k+1)n} = u_{kn+n} = u_{kn} u_{n+1} + u_{kn-1} u_n = a u_n u_{n+1} + u_{kn-1} u_n$$

e dunque u_n divide $u_{(k+1)n}$. L'asserzione è così completamente provata.