AL410 - Algebra Commutativa - A.A. 2016/2017
Valutazione "in itinere" – Prova Finale

AVVERTENZE: *Svolgere il tema, utilizzando al più 3 facciate di un foglio protocollo e scrivendo in modo chiaro e conciso (nel punteggio si terrà conto della leggibilità del testo elaborato).*

TEMA: Anelli di valutazione e Teorema di W. Krull sulla chiusura integrale di un dominio.

ESERCIZIO 1. Sia $S := \mathbb{Z} \setminus (2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z})$.

(1) Mostrare che S è una parte moltiplicativa di $\mathbb{Z}$.
(2) Stabilire se S è una parte moltiplicativa saturata di $\mathbb{Z}$.
(3) Determinare esplicitamente $\mathrm{Spec}(S^{-1}\mathbb{Z})$ e $\mathrm{Max}(S^{-1}\mathbb{Z})$.
(4) Determinare esplicitamente tutti gli ideali primari di $S^{-1}\mathbb{Z}$.
(5) Sia $I := S^{-1}6\mathbb{Z} = \{\frac{a}{s} \mid a \in 6\mathbb{Z}\,, s \in S\}$. Mostrare che I è un ideale di $S^{-1}\mathbb{Z}$ e determinare $\mathrm{Spec}((S^{-1}\mathbb{Z})/I)$ e $\mathrm{Max}((S^{-1}\mathbb{Z})/I)$.
(6) Sia $\mathbb{F}_2 := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ e $\mathbb{F}_3 := \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Stabilire, se esiste una relazione tra l'anello prodotto diretto $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_3$ e l'anello $(S^{-1}\mathbb{Z})/I$ considerato nel precedente punto (5).

ESERCIZIO 2. Si consideri l'anello $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ ed il suo campo dei quozienti $\mathbb{Q}(i\sqrt{5})(= \mathbb{Q}[i\sqrt{5}])$.

(1) Dato comunque un elemento non razionale $\alpha \in \mathbb{Q}(i\sqrt{5})$ mostrare che il polinomio monico minimo (a coefficienti in $\mathbb{Q}$) avente come radice α è $X^2 - \mathrm{Tr}(\alpha)X + \mathrm{N}(\alpha)$, dove $\mathrm{N}(\alpha) := \alpha\overline{\alpha}$ e $\mathrm{Tr}(\alpha) := \alpha + \overline{\alpha}$.
(2) Dopo aver scritto ogni elemento non nullo di $\mathbb{Q}(i\sqrt{5})$ nella forma $(a + ib\sqrt{5})/c$ con $a, b, c \in \mathbb{Z}$ e $\mathrm{MCD}(a, b, c) = 1$ ed averne spiegato le ragioni, calcolare la sua norma e mostrare che $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ è la chiusura integrale di $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}(i\sqrt{5})$.
(3) Mostrare che
$$21 = 3\cdot 7 = (1 + 2i\sqrt{5})(1 - 2i\sqrt{5})$$
e che gli elementi $3,\ 7,\ 1+2i\sqrt{5},\ 1-2i\sqrt{5}$ sono irriducibili, ma non primi, in $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$.
(4) Determinare una decomposizione in ideali primari degli ideali principali
$$3\mathbb{Z}[i\sqrt{5}],\ 7\mathbb{Z}[i\sqrt{5}],\ (1 + 2i\sqrt{5})\mathbb{Z}[i\sqrt{5}],\ (1 - 2i\sqrt{5})\mathbb{Z}[i\sqrt{5}],\ 21\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]\,.$$