ME410 - Matematiche Elementari da un Punto di Vista Superiore
A.A. 2014/2015 – Valutazione "in itinere" – Prima Prova

AVVERTENZE: *Svolgere il tema, utilizzando al più 3 facciate di un foglio protocollo e scrivendo in modo chiaro e conciso (nel punteggio si terrà conto della leggibilità del testo elaborato).*

* * * * * * *

TEMA: Aritmetica dei numeri cardinali: analogie e differenze con l'aritmetica classica dei numeri interi.

* * * * * * *

ESERCIZIO 1. **(a)** Determinare la cardinalità dell'insieme $(\mathbb{C} \times \mathbb{C}) \setminus (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$, spiegando il ragionamento ed i risultati teorici utilizzati per arrivare alla conclusione.

(b) Determinare la cardinalità dell'insieme $\mathbb{A} := \{\alpha \in \mathbb{C} \mid f(\alpha) = 0 \text{ dove } 0 \neq f \in \mathbb{Z}[X] \text{ ed } f \text{ monico}(^*)\}$ ($(^*)$ cioè, con coefficiente direttore uguale ad 1).

ESERCIZIO 2. Sia $X := \{a, b, c, d\}$ e sia $\boldsymbol{\mathcal{A}} := \mathcal{P}(X)$ dotato della usuale struttura di algebra booleana. Sia $B := \{a, b, c\}$ e sia $\boldsymbol{\mathcal{B}} := \{A \in \boldsymbol{\mathcal{A}} \mid A \subseteq B\}$.

(a) Stabilire se su $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ si può introdurre una struttura di algebra booleana con le operazioni $\vee$ e $\wedge$ coincidenti rispettivamente con $\cup$ (unione insiemistica) e $\cap$ (intersezione insiemistica).

(b) Stabilire se $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ con la struttura di algebra booleana introdotta in **(a)** è una sottoalgebra di $\boldsymbol{\mathcal{A}}$.

(c) Tracciare il grafo dell'insieme ordinato (finito) $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ dotato dell'ordine indotto dalla struttura di algebra booleana.

(d) Stabilire se l'applicazione $\varphi : \boldsymbol{\mathcal{A}} \to \boldsymbol{\mathcal{B}}$ definita ponendo $\varphi(Y) := Y \cap B$, per ogni elemento $Y \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$ è un omomorfismo di algebra booleane ed, in caso affermativo, descrivere tutti gli elementi di $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

(e) Stabilire se l'applicazione d'inclusione $\iota : \boldsymbol{\mathcal{B}} \hookrightarrow \boldsymbol{\mathcal{A}}$ è un omomorfismo di algebre booleane.

(f) Considerando $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ con la sua struttura di anello booleano ad esso associata, stabilire se esiste un isomorfismo di anelli booleani tra l'anello booleano prodotto diretto $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$ e l'anello booleano $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ ed, in caso affermativo, descrivere esplicitamente un isomorfismo.

ESERCIZIO 3. Dimostrare che un anello booleano (cioè, un anello nel quale ogni elemento è idempotente) è necessariamente commutativo.