ME410 - Matematiche Elementari da un Punto di Vista Superiore
A.A. 2014/2015 – Valutazione "in itinere" – Seconda Prova

AVVERTENZE: *Svolgere il tema, utilizzando al più 3 facciate di un foglio protocollo e scrivendo in modo chiaro e conciso (nel punteggio si terrà conto della leggibilità del testo elaborato).*

* * * * * * *

TEMA: Teoria della divisibilità in un dominio: proprietà rilevanti.

* * * * * * *

ESERCIZIO 1. Sia $R := \mathbb{Z}[i] \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ prodotto diretto di anelli.

(1) Determinare l'algebra booleana $\boldsymbol{\mathcal{A}} := \mathrm{Idemp}(R)$ degli elementi idempotenti di R e scrivere la tabella additiva di $(\boldsymbol{\mathcal{A}}, +)$ e quella moltiplicativa di $(\boldsymbol{\mathcal{A}}^*, \cdot)$ (dove $\boldsymbol{\mathcal{A}}^* := \boldsymbol{\mathcal{A}} \setminus \{0\}$).
(2) Descrivere lo spazio topologico duale $\mathcal{X}(\boldsymbol{\mathcal{A}})$ di $\boldsymbol{\mathcal{A}}$, cioè elencare i suoi punti ed i suoi aperti.
(3) Descrivere l'algebra booleana duale $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ dello spazio topologico duale $\mathcal{X}(\boldsymbol{\mathcal{A}})$ e definire (elemento per elemento) un isomorfismo di algebre booleane $f : \boldsymbol{\mathcal{A}} \to \boldsymbol{\mathcal{B}}$

ESERCIZIO 2.

(1) Dimostrare per assurdo che non esiste alcuna terna pitagorica positiva (x, y, z) con $z = 2y$.
(2) Dedurre da (1) che $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

ESERCIZIO 3. Sia $F_1 := 1$, $F_2 := 1$, $F_{n+1} := F_n + F_{n-1}$ per $n \geq 2$ la successione dei numeri di Fibonacci. Mostrare se, per ogni $n \geq 2$, sussiste qualcuna tra le seguenti uguaglianze:

(1) $F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_{n+1}^2$;
(2) $F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_{n+1}F_{n+2}$;
(3) $F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_nF_{n+1}$;
(4) $F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = (F_1 + F_2 + \cdots + F_n)^2 - F_{n+1}^2$.

ESERCIZIO 4. Siano X un insieme non vuoto e $\boldsymbol{\mathcal{A}} := \mathcal{P}(X)$ l'algebra di Boole delle parti di X, rispetto alle operazioni usuali. Sia $\mathcal{X}(\boldsymbol{\mathcal{A}}) := \mathrm{Hom}_{\mathrm{Boole}}(\boldsymbol{\mathcal{A}}, \mathbb{F}_2)$ lo spazio topologico booleano duale di $\boldsymbol{\mathcal{A}}$, munito della topologia di Stone (cioè la topologia indotta dalla topologia prodotto di ${\mathbb{F}_2}^{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$). Per ogni $x \in X$, sia $\chi^x : \boldsymbol{\mathcal{A}} \to \mathbb{F}_2$ la funzione caratteristica calcolata in x (cioè, per ogni $Y \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$, $\chi^x(Y) := \chi_Y(x) := 0$ se $x \notin Y$ e $\chi^x(Y) := \chi_Y(x) := 1$ se $x \in Y$).

(1) Si verifichi che $\chi^x \in \mathcal{X}(\boldsymbol{\mathcal{A}})$.
(2*) Sia $\tau \in \mathcal{X}(\boldsymbol{\mathcal{A}})$. Si dimostri che τ è un punto isolato in $\mathcal{X}(\boldsymbol{\mathcal{A}})$ (i.e., $\{\tau\}$ è aperto in $\mathcal{X}(\boldsymbol{\mathcal{A}})$) se, e soltanto se, esiste un punto $\overline{x} \in X$ tale che $\tau = \chi^{\overline{x}}$.
(3**) Sia adesso $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ una qualsiasi algebra di Boole e sia $\mathcal{X}(\boldsymbol{\mathcal{B}})$ lo spazio topologico booleano duale di $\boldsymbol{\mathcal{B}}$. Prendendo spunto da (2), si enunci e si dimostri una caratterizzazione per i punti isolati di $\mathcal{X}(\boldsymbol{\mathcal{B}})$.