Traccia di svolgimento dell'Esercizio 4(3,b) della seconda prova in itinere di ME410 (2013/2014).

Per ogni elemento $A \in \mathcal{A}$ poniamo $A^\star := \{f \in \mathcal{X}(\mathcal{A}) : f(A) = 1\}$. Come è ben noto dalla teoria generale, gli insiemi $A^\star$, al variare di $A \in \mathcal{A}$, formano una base di clopen del duale topologico $\mathcal{X}(\mathcal{A})$ di $\mathcal{A}$. Preserviamo le notazioni introdotte nel testo dell'esercizio e supponiamo, per assurdo, che la chiusura $\overline{U}$ dell'insieme $U := \bigcup_{i \in \mathbf{N}} A_i^\star$ sia un aperto di $\mathcal{X}(A)$. Allora $\overline{U}$ è un clopen in $\mathcal{X}(\mathcal{A})$ e, per il Teorema di dualità di Stone, esiste un unico elemento $B \in \mathcal{A}$ tale che $B^\star = \overline{U}$. Sia $\mathcal{B}$ l'algebra di Boole dei clopen di $\mathcal{X}(\mathcal{A})$. Notiamo adesso che gli ordini canonicamente indotti da entrambe le algebre di Boole $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ coincidono con l'inclusione insiemistica, e ne deduciamo che nell'algebra di Boole $\mathcal{B}$ il punto $\overline{U}$ è l'estremo superiore della famiglia $\{A_i^\star : i \in \mathbf{N}\}$. Pertanto, tenendo presente che l'isomorfismo naturale di algebre di Boole $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ è, in particolare, un isomorfismo di insiemi parzialmente ordinati, segue immediatamente che B è l'estremo superiore in $\mathcal{A}$ della famiglia $\{A_i : i \in \mathbf{N}\}$. Questa è una contraddizione, perché, essendo l'ordine indotto da $\mathcal{A}$ l'inclusione insiemistica, è subito visto che la collezione di insiemi $\{A_i : i \in \mathbf{N}\}$ è priva di estremo superiore in $\mathcal{A}$.