
ME410 - Matematiche Elementari da un Punto di Vista Superiore
A.A. 2015/2016 – Appello B

AVVERTENZE: *Svolgere il tema, utilizzando al più 2 facciate di un foglio protocollo e scrivendo in modo chiaro e conciso (nel punteggio si terrà conto della leggibilità del testo elaborato).*

TEMA: Spazio topologico booleano duale di un'algebra booleana; algebra booleana duale di uno spazio topologico. Esempi. Enunciato del teorema di Stone.

Esercizio 1. Definire le nozioni di algebra booleana atomica e di algebra booleana completa. Dimostrare che un'algebra booleana atomica e completa è isomorfa all'algebra booleana di tutti i sottoinsiemi di un opportuno insieme (da determinare esplicitamente).

Esercizio 2. Dimostrare che due triangoli pitagorici (triangoli rettangoli con lati di lunghezza intera) che hanno la stessa area e la stessa ipotenusa sono uguali.

Esercizio 3. Determinare la cardinalità dell'insieme prodotto cartesiano

$$\{0, 1, 2, 3, 4\}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\{0,1,2,3,4\}},$$

dove $A^B := \{f : B \rightarrow A \mid f \text{ è un'applicazione tra insiemi}\}$.

Esercizio 4. Sia \mathbb{F}_2 il campo $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Per ciascuno dei seguenti anelli quoziente:

$$\frac{\mathbb{F}_2[X]}{(X^2 + X)\mathbb{F}_2[X]} \quad \frac{\mathbb{F}_2[X]}{(X^2 + X + 1)\mathbb{F}_2[X]}$$

stabilire se è un anello booleano oppure non lo è.