
ME410 - Matematiche Elementari da un Punto di Vista Superiore
A.A. 2015/2016 – Valutazione “in itinere” – Prima Prova

AVVERTENZE: Svolgere il tema, utilizzando al più 3 facciate di un foglio protocollo e scrivendo in modo chiaro e conciso (nel punteggio si terrà conto della leggibilità del testo elaborato; non verrà valutata la parte dello svolgimento successiva a 3 facciate).

* * * * *

TEMA: Cardinalità del numerabile e cardinalità del continuo.

* * * * *

ESERCIZIO 1. Sia p un numero primo, sia \mathbb{F}_p il campo con p elementi, e sia X un'indeterminata sopra \mathbb{F}_p .

Determinare la cardinalità

- dell'insieme dei polinomi $\mathbb{F}_p[X]$;
- dell'insieme delle serie formali $\mathbb{F}_p[[X]]$;
- dell'insieme delle funzioni razionali $\mathbb{F}_p(X)$ (campo dei quozienti del dominio $\mathbb{F}_p[X]$);
- dell'insieme delle serie formali di Laurent $\mathbb{F}_p((X))$ (campo dei quozienti del dominio $\mathbb{F}_p[[X]]$).

ESERCIZIO 2.

- (a) Dimostrare che un anello booleano ha caratteristica 2.
- (b) Sia K un campo ed X un'indeterminata su K .
Determinare, *se esiste*, un campo K tale che l'anello quoziente $K[X]/X^2K[X]$ è un anello booleano. (Ovviamente, in caso positivo, dimostrare esplicitamente che $K[X]/X^2K[X]$ è un anello booleano.)
- (c) Dimostrare che, in un anello booleano, ogni ideale generato da due elementi (a, b) può essere generato da un solo elemento $(a + b + ab)$.
- (d) Dimostrare che, in un anello booleano, ogni ideale finitamente generato può essere generato da un solo elemento.
- (e) Dare un esempio di un anello booleano in cui non tutti gli ideali possono essere generati da un solo elemento.

ESERCIZIO 3.

- (a) Sia $\mathbb{D}_{70} := \{d \mid d \text{ è un divisore di } 70 \text{ e } 1 \leq d \leq 70\}$. Presi comunque $d, d_1, d_2 \in \mathbb{D}_{70}$, si ponga:

$$\begin{aligned}d_1 \vee d_2 &:= \text{mcm}(d_1, d_2), \\d_1 \wedge d_2 &:= \text{MCD}(d_1, d_2), \\d' &:= \frac{70}{d},\end{aligned}$$

in modo che $(\mathbb{D}_{70}, \vee, \wedge, ', 1, 70)$ diventi un'algebra booleana.

Nell'anello booleano associato $(\mathbb{D}_{70}, +, \cdot)$, calcolare esplicitamente i valori di $7 \cdot (5 + 10)$ e di $7 + (5 \cdot 10)$.

- (b) Tracciare il diagramma dell'insieme ordinato \mathbb{D}_{70} (dotato dell'ordine indotto dalla struttura di algebra booleana). Determinare –se esiste– un insieme X tale che l'algebra booleana $P(X)$ sia isomorfa all'algebra booleana \mathbb{D}_{70} .
In caso di risposta affermativa, descrivere esplicitamente un tale isomorfismo.