
ME410 - Matematiche Elementari da un Punto di Vista Superiore
A.A. 2015/2016 – Valutazione “in itinere” – Prima Prova

AVVERTENZE: Svolgere il tema, utilizzando al più 3 facciate di un foglio protocollo e scrivendo in modo chiaro e conciso (nel punteggio si terrà conto della leggibilità del testo elaborato; non verrà valutata la parte dello svolgimento successiva a 3 facciate).

* * * * *

TEMA: Cardinalità del numerabile e cardinalità del continuo.

* * * * *

ESERCIZIO 1. Sia p un numero primo, sia \mathbb{F}_p il campo con p elementi, e sia X un'indeterminata sopra \mathbb{F}_p .

Determinare la cardinalità

- dell'insieme dei polinomi $\mathbb{F}_p[X]$;
- dell'insieme delle serie formali $\mathbb{F}_p[[X]]$;
- dell'insieme delle funzioni razionali $\mathbb{F}_p(X)$ (campo dei quozienti del dominio $\mathbb{F}_p[X]$);
- dell'insieme delle serie formali di Laurent $\mathbb{F}_p((X))$ (campo dei quozienti del dominio $\mathbb{F}_p[[X]]$).

ESERCIZIO 2.

(a) Dimostrare che un anello booleano ha caratteristica 2.

(b) Sia K un campo ed X un'indeterminata su K .

Determinare, *se esiste*, un campo K tale che l'anello quoziente $K[X]/X^2K[X]$ è un anello booleano. (Ovviamente, in caso positivo, dimostrare esplicitamente che $K[X]/X^2K[X]$ è un anello booleano.)

(c) Dimostrare che, in un anello booleano, ogni ideale generato da due elementi (a, b) può essere generato da un solo elemento $(a + b + ab)$.

(d) Dimostrare che, in un anello booleano, ogni ideale finitamente generato può essere generato da un solo elemento.

(e) Dare un esempio di un anello booleano in cui non tutti gli ideali possono essere generati da un solo elemento.

ESERCIZIO 3.

(a) Sia $\mathbb{D}_{70} := \{d \mid d \text{ è un divisore di } 70 \text{ e } 1 \leq d \leq 70\}$. Presi comunque $d, d_1, d_2 \in \mathbb{D}_{70}$, si ponga:

$$\begin{aligned}d_1 \vee d_2 &:= \text{mcm}(d_1, d_2), \\d_1 \wedge d_2 &:= \text{MCD}(d_1, d_2), \\d' &:= \frac{70}{d},\end{aligned}$$

in modo che $(\mathbb{D}_{70}, \vee, \wedge, ', 1, 70)$ diventi un'algebra booleana.

Nell'anello booleano associato $(\mathbb{D}_{70}, +, \cdot)$, calcolare esplicitamente i valori di $7 \cdot (5 + 10)$ e di $7 + (5 \cdot 10)$.

(b) Tracciare il diagramma dell'insieme ordinato \mathbb{D}_{70} (dotato dell'ordine indotto dalla struttura di algebra booleana). Determinare –se esiste– un insieme X tale che l'algebra booleana $P(X)$ sia isomorfa all'algebra booleana \mathbb{D}_{70} .

In caso di risposta affermativa, descrivere esplicitamente un tale isomorfismo.