.

ME410 - Matematiche Elementari da un Punto di Vista Superiore

A.A. 2015/2016 – Valutazione "in itinere" – Seconda Prova

AVVERTENZE: *Svolgere il tema, utilizzando al più 3 facciate di un foglio protocollo e scrivendo in modo chiaro e conciso (nel punteggio si terrà conto della leggibilità del testo elaborato).*

TEMA: Domini a fattorizzazione unica ed MCD-domini (cioè, domini in cui ogni coppia di elementi non entrambi nulli possiede un Massimo Comune Divisore).

ESERCIZIO 1. **(1)** Sia $\mathscr{A}$ un'algebra booleana ed $\mathscr{I}$ un ideale booleano di $\mathscr{A}$. Sia $\mathscr{F}(\mathscr{I})$ il filtro di $\mathscr{A}$ *canonicamente associato ad* $\mathscr{I}$. Determinare se

$$\mathscr{I} \cup \mathscr{F}(\mathscr{I})$$

è oppure non è una sottoalgebra booleana di $\mathscr{A}$.

(2) Sia $\mathscr{A}$ l'algebra booleana prodotto diretto $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$ e sia $\mathscr{I}$ l'ideale $\mathbb{F}_2 \times \{0\} \times \{0\}$ di $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$.

(2, a) Descrivere in questo caso –espicitamente– gli elementi di $\mathscr{F}(\mathscr{I})$ e di $\mathscr{I} \cup \mathscr{F}(\mathscr{I})$.

(2, b) Determinare –se esiste– un sottoinsieme X di $\mathscr{A}$ ed un omomorfismo di algebre booleane $\varphi : P(X) \to \mathscr{A}$ tale che $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathscr{I} \cup \mathscr{F}(\mathscr{I})$.

ESERCIZIO 2. **(1)** Dimostrare che se $n \geq 4$ ed il numero di Fibonacci F_n è irriducibile, allora n deve essere un intero primo.

(2) Dimostrare per $n \geq 2$ che:

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n \,.$$

ESERCIZIO 3. Si ricordi che un *ultrafiltro* su un insieme non vuoto X è una collezione non vuota $\mathscr{U}$ di sottoinsiemi non vuoti di X tale che:

(a) se $A, B \in \mathscr{U}$, allora $A \cap B \in \mathscr{U}$;
(b) se $A \in \mathscr{U}$ e $A \subseteq B \subseteq X$, allora $B \in \mathscr{U}$;
(c) se $A \subseteq X$, allora $A \in \mathscr{U}$ oppure $X \setminus A \in \mathscr{U}$.

Siano X un insieme non vuoto e βX l'insieme di tutti gli ultrafiltri su X. Per ogni sottoinsieme A di X, si ponga

$$A^\star := \{\mathscr{U} \in \beta X \mid A \in \mathscr{U}\}\,,$$

e si dia per buono che $\mathscr{B} := \{A^\star \mid A \subseteq X\}$ è base per una topologia $\mathfrak{T}$ su βX. Da adesso in poi βX sarà uno spazio topologico, munito della topologia $\mathfrak{T}$.

(1) Si verifichi che βX è di Hausdorff.
(2) Si verifichi che βX è compatto.
(3) Munito X della topologia discreta e osservato che, per ogni $x \in X$ si ha $\mathscr{U}_x := \{A \subseteq X \mid x \in A\} \in \beta X$, si dimostri che la funzione $\iota : X \longrightarrow \beta X$, $x \mapsto \mathscr{U}_x$ è un'immersione topologica e che $\iota(X)$ è denso in βX.
(4) Si dimostri che βX è canonicamente omeomorfo allo spazio topologico booleano duale dell'algebra booleana $P(X)$ (insieme delle parti di X).

Qualche suggerimento per la risoluzione dell'Esercizio 3.

(1) Presi $\mathscr{U} \neq \mathscr{U}'$ in βX, allora deve esistere (per esempio) un sottoinsieme A di X in modo tale che:

$$A \in \mathscr{U} \quad \text{e} \quad A \notin \mathscr{U}',$$

quindi

$$\mathscr{U} \in A^\star \quad \text{e} \quad \mathscr{U}' \in (X \setminus A)^\star .$$

Dal momento che, presi $A, B \subseteq X$, è facile verificare che $(A \cap B)^\star = A^\star \cap B^\star$, allora:

$$A^\star \cap (X \setminus A)^\star = (A \cap (X \setminus A))^\star = \emptyset^\star = \emptyset .$$

Pertanto, gli aperti disgiunti $A^\star$ ed $(X \setminus A)^\star$ di βX separano $\mathscr{U} \neq \mathscr{U}'$ in βX.

(2) Sia $\{A_i^\star \mid i \in I\}$ sia un ricoprimento di βX formato da aperti basici. Supponiamo, per assurdo, che per ogni sottoinsieme finito J di I, si abbia

$$(\bigcup\{A_j \mid j \in J\})^\star = \bigcup\{A_j^\star \mid j \in J\} \subsetneq \bigcup\{A_i^\star \mid i \in I\} = \beta X .$$

Da questo si deduce che esiste $\mathscr{U}_J \in \beta X$ tale che $\mathscr{U}_J \in (\bigcap\{X \setminus A_j \mid j \in J\})^\star = \bigcap\{(X \setminus A_j)^\star \mid j \in J\}$ e quindi $\bigcap\{X \setminus A_j \mid j \in J\} \in \mathscr{U}_J$ e dunque $\bigcap\{X \setminus A_j \mid j \in J\} \neq \emptyset$.

Pertanto la famiglia $\mathscr{F} := \{X \setminus A_i \mid i \in I\}$ ha la proprietà dell'intersezione finita. Da ciò si deduce che esiste un ultrafiltro $\mathscr{U}$ di X tale che $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{U}$. Quindi, $X \setminus A_i \in \mathscr{U}$ per ogni $i \in I$, cioè $\mathscr{U} \notin \bigcup\{A_i^\star \mid i \in I\} = \beta X$: assurdo.

(3) Le verifiche che $\mathscr{U}_x$ sia un ultrafiltro di X, che ι sia un'applicazione iniettiva e che ι sia continua sono immediate (quest'ultima proprietà è banale perché X è dotato della topologia discreta). E' facile vedere che ι stabilisce un omeomorfismo con la sua immagine in βX, in quanto ogni $\mathscr{U}_x$ è aperto in $\mathrm{Im}(\iota)$ con la topologia indotta, perché $\{x\}^\star \cap \mathrm{Im}(\iota) = \{\mathscr{U}_x\}$.

Infine $\mathrm{Im}(\iota)$ è denso in βX perchè per ogni sottoinsieme non vuoto A di X e per ogni $x \in A$, $\{\mathscr{U}_x\} = \{x\}^\star \cap \mathrm{Im}(\iota) \subseteq A^\star \cap \mathrm{Im}(\iota)$.

(4) Intanto si osservi che l'algebra booleana duale (formata dagli aperti-chiusi) dello spazio topologico booleano βX coincide con l'algebra booleana completa e atomica $P(X)$ (l'insieme delle parti di X). Poi, si applichi la versione topologica del teorema di rappresentazione di Stone e cioè ogni spazio topologico booleano è naturalmente omeomorfo allo spazio topologico booleano duale dell'algebra booleana duale.

Nel caso specifico dello spazio booleano βX, si ha che βX è omeomorfo allo spazio topologico $\mathrm{Hom}_{\mathrm{bool}}(P(X), \mathbb{F}_2)$ (con la topologia indotta da $\mathbb{F}_2^{P(X)}$ dotato della topologia prodotto, assumendo $\mathbb{F}_2$ dotato della topologia discreta).