
AL110 - Algebra 1 - A.A. 2010/2011
Appello B - Febbraio 2011

Matricola (O ALTRO IDENTIFICATIVO) →

Cognome:.....**Nome:**.....

esercizio	1	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5.a	2.5.b	2.6	2.7	3.1	3.2	3.3	4.1	4.2	4.3	4.4
punti max	2	1	1	1	2	1	3	2	4	3	2	1	1	2	2	1
punti assegnati																
totale																

esercizio	5.1.a	5.1.b	5.1.c	5.1.d	5.2.a	5.2.b	6.1.a	6.1.b	6.2	6.3.a	6.3.b	6.3.c	7.1	7.2	7.3
punti max	1	3	2	2	1	1	2	1	2	1	2	2	2	2	1
punti assegnati															
totale															

AVVERTENZE : Svolgere gli esercizi in modo conciso, ma esauriente, nello spazio assegnato nel presente fascicolo. Non verranno accettati altri fogli aggiuntivi.

– Fino a “**due punti**” ulteriori (**bonus**) potranno essere assegnati agli elaborati scritti in modo molto chiaro.

– Fino a “**– due punti**” (**malus**) potranno essere tolti agli elaborati scritti con calligrafia difficilmente leggibile.

ESERCIZIO 1. Determinare tutte le eventuali soluzioni del sistema di congruenze seguente, descrivendo brevemente il metodo utilizzato:

$$\begin{cases} 7X \equiv 2 \pmod{9} \\ 3X \equiv 10 \pmod{11} \\ -2X \equiv 3 \pmod{13} \end{cases}.$$

ESERCIZIO 2. Siano A e B due anelli commutativi con unità.

Dotiamo $A \times B$ della struttura naturale di anello le cui operazioni sono definite componente per componente, cioè:

$$(a, b) + (a', b') := (a + a', b + b'), \quad (a, b) \cdot (a', b') := (aa', bb'), \quad \forall a, a' \in A, \forall b, b' \in B.$$

- (1) Determinare se $(A \times B, +, \cdot)$ è un anello commutativo o/e unitario o/e privo di divisori dello zero.
- (2) Stabilire se, dato I un ideale di A e J un ideale di B , $I \times J$ è un ideale di $(A \times B, +, \cdot)$.
- (3) Verificare che l'applicazione $\varphi : A \times B \rightarrow A/I \times B/J$ definita ponendo $\varphi((a, b)) := (a + I, b + J)$, dove $a + I := \{a + i \mid i \in I\}$, $b + J := \{b + j \mid j \in J\}$, è un omomorfismo suriettivo di anelli. Determinare, poi, esplicitamente $\text{Ker}(\varphi)$.
- (4) Determinare esplicitamente un isomorfismo di anelli tra $(A \times B)/(I \times J)$ e $A/I \times B/J$.
- (5) Sia adesso H un ideale di $A \times B$ e siano $p_A : A \times B \rightarrow B$ e $p_B : A \times B \rightarrow A$, le applicazioni di proiezione su A e B , rispettivamente (i.e., $p_A((a, b)) := a$ e $p_B((a, b)) := b$, per ogni $(a, b) \in A \times B$).
 - (5.a) Verificare che $p_A(H)$ e $p_B(H)$ sono ideali di A e B , rispettivamente.
 - (5.b) Dimostrare o confutare che $H = p_A(H) \times p_B(H)$.
- (6) Determinare esplicitamente –se esiste– un isomorfismo di anelli tra $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +, \cdot)$ e $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +, \cdot)$.
- (7) Sia $(\lambda, \mu) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ una soluzione dell'equazione diofantea lineare in due indeterminate $10X - 7Y = 1$. Determinare esplicitamente –se esiste– un isomorfismo di anelli tra $(\mathbb{Z}/\lambda\mu\mathbb{Z}, +, \cdot)$ e $(\mathbb{Z}/\lambda\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\mu\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

ESERCIZIO 3.

- (1) Sia $\alpha \in \mathbb{Q}$ e sia $0 \neq f(T) \in \mathbb{Q}[T]$ (= anello dei polinomi a coefficienti nel campo $\mathbb{Q}$ e nell'indeterminata T).

Dimostrare che $f(\alpha) = 0$ se e soltanto se esiste un polinomio non nullo $g(T) \in \mathbb{Q}[T]$ in modo che $f(T) = (T - \alpha)g(T)$.

- (2) Determinare il MCD ed una identità di Bézout dei seguenti due polinomi in $\mathbb{Q}[T]$:

$$a(T) := 20 + 16T - 7T^2 - 3T^3 + T^4, \quad b(T) := -6 - T + T^2.$$

- (3) Determinare una fattorizzazione in polinomi irriducibili in $\mathbb{Q}[T]$ del polinomio $b(T) := -6 - T + T^2$.

ESERCIZIO 4. Sia p un numero primo fissato e sia $f_p : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ l'applicazione definita nella maniera seguente:

$$f_p(x) := \begin{cases} x + p & \text{se } p \mid x, \\ x & \text{se } p \nmid x. \end{cases}$$

- (1) Calcolare $f_p(x)$, quando $-3 \leq x \leq 3$ e $p = 2$.
- (2) Stabilire se f_p è un'applicazione iniettiva o/e suriettiva o/e biiettiva.
- (3) Definire esplicitamente la corrispondenza inversa dell'applicazione f_p e stabilire se tale corrispondenza inversa è un'applicazione.
- (4) Determinare esplicitamente $f_5^{-1}(\{35\})$.

ESERCIZIO 5.

- (1) Sia $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e sia $\mathcal{R}$ la relazione su $\mathbb{C}^*$ definita come segue, dati due elementi $z := a + ib$ e $w := c + id$ in $\mathbb{C}^*$:

$$z\mathcal{R}w :\Leftrightarrow a\sqrt{c^2 + d^2} = c\sqrt{a^2 + b^2} \Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{c}{\sqrt{c^2 + d^2}}.$$

- (1.a) Mostrare che $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza su $\mathbb{C}^*$.
 (1.b) Descrivere esplicitamente, anche come insieme geometrico nel piano complesso, la classe di equivalenza $[z]_{\mathcal{R}}$ per un fissato $z \in \mathbb{C}^*$.
 (1.c) Per ogni $w \in \mathbb{C}^*$, sia f_w la corrispondenza da $\mathbb{C}^*/\mathcal{R}$ a $\mathbb{C}^*/\mathcal{R}$ definita da $[z]_{\mathcal{R}} \mapsto [zw]_{\mathcal{R}}$, al variare di $z \in \mathbb{C}^*$.
 Stabilire che f_w non è una funzione, quando $w \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}$.
 (1.d) Determinare tutti e soli gli elementi $w \in \mathbb{C}^*$ tali che f_w è una funzione da $\mathbb{C}^*/\mathcal{R}$ a $\mathbb{C}^*/\mathcal{R}$.
 (2) Siano dati i numeri complessi

$$u := 5 - 3i \quad \text{e} \quad v := 2 - 3i.$$

 (2.a) Determinare il numero complesso $z := x + iy$ tale che $u = vz$.
 (2.b) Per il numero complesso z determinato in (2.a) calcolare $a, b \in \mathbb{Q}$ in modo tale che $z^{-1} = a + ib$.

ESERCIZIO 6.

- (1) Dato un gruppo $(G, \cdot)$ e due suoi sottogruppi H_1 e H_2 .
- (1.a) Stabilire se e quando $H_1 \cup H_2$ è un sottogruppo oppure un sottogruppo normale di $(G, \cdot)$.
- (1.b) Stabilire se e quando $H_1 \cap H_2$ è un sottogruppo oppure un sottogruppo normale di $(G, \cdot)$.
- (2) Dato un omomorfismo di gruppi $f : (G, \cdot) \rightarrow (G', \cdot)$, dimostrare che $\text{Ker}(f)$ è un sottogruppo normale di G ed $\text{Im}(f)$ è un sottogruppo, non necessariamente normale, di G' .
- (3) Sia $(\mathbb{Q}^* \times \mathbb{R}^*, \cdot)$ il gruppo prodotto diretto dei gruppi $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ e $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ (cioè, l'operazione di prodotto in $\mathbb{Q}^* \times \mathbb{R}^*$ è definita componente per componente). Siano p_1 e p_2 le due proiezioni, cioè:

$$\begin{aligned} p_1 : \mathbb{Q}^* \times \mathbb{R}^* &\rightarrow \mathbb{Q}^*, & (x, y) &\mapsto x, \\ p_2 : \mathbb{Q}^* \times \mathbb{R}^* &\rightarrow \mathbb{R}^*, & (x, y) &\mapsto y. \end{aligned}$$

- (3.a) Descrivere esplicitamente $\text{Ker}(p_1)$ e $\text{Ker}(p_2)$.
- (3.b) Descrivere il gruppo-quotiente $(\mathbb{Q}^* \times \mathbb{R}^*)/\text{Ker}(p_1)$ e il gruppo-quotiente $(\mathbb{Q}^* \times \mathbb{R}^*)/\text{Ker}(p_2)$.
- (3.c) Mostrare che $H := \text{Ker}(p_1) \cap \text{Ker}(p_2)$ è un sottogruppo normale di $\mathbb{Q}^* \times \mathbb{R}^*$ e descrivere esplicitamente il gruppo-quotiente $(\mathbb{Q}^* \times \mathbb{R}^*)/H$.

ESERCIZIO 7. Sia $\varphi : \mathbb{Z}[T] \rightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})[T]$ l'omomorfismo suriettivo canonico di anelli definito, per ogni $f(T) := a_0 + a_1T + \dots + a_rT^r \in \mathbb{Z}[T]$, nella maniera seguente:

$$\varphi(a_0 + a_1T + \dots + a_rT^r) := [a_0]_n + [a_1]_nT + \dots + [a_r]_nT^r.$$

- (1) Mostrare che se $f(T)$ è un polinomio monico di $\mathbb{Z}[T]$ e $\varphi(f(T))$ è un polinomio irriducibile in $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})[T]$ allora $f(T)$ è un polinomio irriducibile in $\mathbb{Z}[T]$.
- (2) Si prenda $n = 5$, mostrare che il polinomio $7 + 15T^3 + T^4$ è irriducibile in $\mathbb{Z}[T]$.
- (3) Stabilire se il polinomio $7 + 15T^3 + T^4$ è irriducibile in $\mathbb{Q}[T]$.