Università degli Studi "Roma Tre"
Corso di Laurea in Matematica – a.a. 2010/2011
AL110 – Algebra 1
Appello B - prova di "riparazione"

Esercizio. Si consideri il campo $\mathbf{F}_3 := (\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}, +, \cdot)$, e sia $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_3)$ il gruppo (rispetto al prodotto riga per colonna) delle matrici invertibili 2×2 a entrate in $\mathbf{F}_3$ $(:= \{[0]_3, [1]_3, [2]_3\})$, cioè,

$$\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_3) := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{F}_3,\ \alpha\delta - \beta\gamma \neq [0]_3 \right\}.$$

Poniamo

$$G := \left\{ \begin{pmatrix} a & [0]_3 \\ b & d \end{pmatrix} \mid a, b, d \in \mathbf{F}_3,\ ad \neq [0]_3 \right\} \qquad H := \left\{ \begin{pmatrix} a & [0]_3 \\ b & d \end{pmatrix} \in G \mid ad = [1]_3 \right\}.$$

(i) Si verifichi che G è un sottogruppo di $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_3)$. Si determini il numero degli elementi distinti di G.

(ii) Si stabilisca se G è un gruppo abeliano.

(iii) Considerato il gruppo $(\mathbf{F}_3^*, \cdot)$ degli elementi non nulli di $\mathbf{F}_3$ (cioè, $\mathbf{F}_3^* := \mathbf{F}_3 \setminus \{[0]_3\}$), si verifichi che l'applicazione $\varphi : G \longrightarrow \mathbf{F}_3^*$ tale che $\begin{pmatrix} a & [0]_3 \\ b & d \end{pmatrix} \mapsto ad$ è un omomorfismo suriettivo di gruppi (moltiplicativi).

(iv) Si verifichi che H è un sottogruppo di G, e si stabilisca se H è normale in G. Si determini il numero degli elementi distinti di H.

(v) Si enunci il Teorema dell'Omomorfismo per i gruppi.

(vi) Usando (iii) e (iv) e il Teorema dell'Omomorfismo, si deduca che G/H è un gruppo con 2 elementi.

(vii) Si dimostri che, per ogni $a \in \mathbf{F}_3^*$, $a^2 = [1]_3$ collegando questa proprietà con il "Piccolo" Teorema di Fermat.

(viii) Si verifichi se sussiste la seguente proprietà: per ogni matrice $\Gamma \in G$, accade che $\Gamma^2 \in H$.

(ix) Si determini il più piccolo intero positivo n tale che Λ^n è la matrice identica, per ogni matrice $\Lambda \in H$.

(x) Si determini il più piccolo intero positivo m tale che Γ^m è la matrice identica, per ogni matrice $\Gamma \in G$.