AL110 - Algebra 1 - A.A. 2011/2012
Valutazione “in itinere” - I Prova

Cognome: .... **Nome:** ....

Matricola (O ALTRO IDENTIFICATIVO) → | | | | | | |

UTILIZZARE LO STESSO IDENTIFICATIVO DEL TEST DI OTTOBRE

esercizio	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	2.1a	2.1b	2.2	3	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6
punti max	2	6	3	2	3	1	1	3	3	2	3	3	2	4	4
valutazione															

esercizio	5.1	5.2	6.1	6.2	6.3	6.4	6.5	6.6	6.7	6.8	6.9	6.10
punti max	3	4	2	2	2	5	3	4	5	3	3	6
valutazione												
TOTALE →					*“bonus”* →				*“malus”* →			

AVVERTENZE : *Svolgere gli esercizi in modo conciso, ma esauriente, nello spazio assegnato.*
– *Fino a* **due punti ulteriori (bonus)** *potranno essere assegnati agli elaborati scritti in modo molto chiaro.*
– *Fino a* **due punti (malus)** *potranno essere* **detratti** *dagli elaborati scritti in modo molto confuso o difficilmente leggibile.*

LEGGERE LE AVVERTENZE

NON SFOGLIARE IL TESTO
PRIMA CHE VENGA DATO UFFICIAMENTE INIZIO ALLA PROVA DAL DOCENTE

ESERCIZIO 1. **(1)** Enunciare, esplicitando chiaramente ipotesi e tesi, il teorema di divisione con il resto in $\mathbb{Z}$.

(2) Dimostrare, con poche frasi formulate in modo chiaro e conciso, il teorema di divisione con il resto in $\mathbb{Z}$.

(3) Calcolare, con l'algoritmo euclideo delle divisioni successive, il $\mathrm{MCD}(11501, 525)$. Determinare, poi, il $\mathrm{mcm}(11501, 525)$.

(4) Dare esplicitamente una identità di Bézout per il $\mathrm{MCD}((11501, 525)$.

(5) Determinare per quali valori di $\ell \in \mathbb{Z}$ la seguente equazione (diofantea lineare) nelle incognite X ed Y:

$$11501 \cdot X + 525 \cdot Y = \ell$$

è risolubile. Poi, per ciascuno di tali valori di ℓ, utilizzando il punto **(4)**, determinare tutte le soluzioni intere della precedente equazione.

ESERCIZIO 2. **(1)** Enunciare una proposizione logicamente equivalente alla negazione di ciascuna delle seguenti (ovviamente, non è ammessa la formulazione “non è vero che...” o simili):

(a) *Homer Simpson mangia ciambelle colorate e beve birra Duff.*

(b) *In ogni comune della regione secessionista dell'Assurdistan, autoproclamata “Fandonistan del Sud”, sono state istituite ronde popolari e varate norme xenofobe.*

(2) Date tre proposizioni elementari $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ e $\boldsymbol{R}$ descrivere la tabella di verità della proposizione “ $(\boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{R}) \Rightarrow ((\neg \boldsymbol{Q}) \wedge \boldsymbol{P})$ ”.

$\boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{Q}$	$\boldsymbol{R}$	$(\boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{R}) \Rightarrow ((\neg \boldsymbol{Q}) \wedge \boldsymbol{P})$
v	v	v	
v	v	f	
v	f	v	
v	f	f	
f	v	v	
f	v	f	
f	f	v	
f	f	f	

ESERCIZIO 3. Il Parlamento del remoto paese Assurdistan è formato da 630 membri, eletti con un opaco sistema elettorale denominato *"Suinum"*. Di questi 630 parlamentari, 314 non sono (ancora) mai stati rinviati a giudizio od inquisiti dall'autorità giudiziaria. I rimanenti appartengono ad almeno uno dei seguenti 3 gruppi:

- Il primo gruppo $(\boldsymbol{A})$ è composto da **31** membri che sono indagati per associazione di tipo mafioso,
- il secondo gruppo $(\boldsymbol{B})$ è composto da **101** membri che sono inquisiti per bancarotta fraudolenta,
- il terzo gruppo $(\boldsymbol{C})$ è composto da **211** membri inquisiti per corruzione, concussione o malversazione.

Sapendo che sono esattamente **13** i membri del Parlamento che appartengono a ciascuna delle tre distinte coppie di gruppi (i.e., $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}$), determinare il numero dei parlamentari che appartengono contemporaneamente ai tre gruppi (i.e., $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}$).

ESERCIZIO 4. Sia X un insieme non vuoto e sia $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ l'insieme di tutte le relazioni di equivalenza definite su X e sia $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ un sottoinsieme non vuoto di $\boldsymbol{\mathcal{E}}$. Si definisca su X una nuova relazione $\sigma_{\boldsymbol{\mathcal{R}}}$ (che dipende da $\boldsymbol{\mathcal{R}}$) definita nel seguente modo, dati $x_1, x_2 \in X$:

$$x_1 \sigma_{\boldsymbol{\mathcal{R}}} x_2 \ :\Leftrightarrow\ x_1 \rho x_2 \qquad \forall \rho \in \boldsymbol{\mathcal{R}}\,.$$

(1) Stabilire se $\sigma_{\boldsymbol{\mathcal{R}}}$ è oppure non è una relazione di equivalenza su X.

(2) Se per ogni $\rho \in \mathcal{R}$, denotiamo con R_ρ il suo grafico, allora descrivere il grafico della relazione $\sigma_{\boldsymbol{\mathcal{R}}}$ (in funzione dei grafici R_ρ, al variare di $\rho \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$).

(3) Sia $X := \mathbb{C}^\star$ l'insieme dei numeri complessi non nulli e sia h un numero intero positivo fissato. Si definisca su X la seguente relazione, dati $z_1, z_2 \in X$:

$$z_1 \rho_h z_2 \ :\Leftrightarrow\ \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^h \in \mathbb{R}\,.$$

Determinare quali proprietà (tra le seguenti: Riflessiva, Simmetrica, Antisimmetrica, Transitiva, Totale) sono soddisfatte da ρ_h.

(4) Siano $z_1 := 3 - i \cdot 5$ e $z_2 := 7 + i \cdot 2$. Determinare $a, b \in \mathbb{R}$ in modo tale che

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 = a + ib\,.$$

(5) Siano X e ρ_h come in (**3**) e siano

$$z_1 := r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\,, \qquad z_2 := r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

l'espressione in forma polare di z_1 e z_2. Determinare condizioni su r_1 e r_2 e su θ_1 e θ_2 che esprimano in forma equivalente il fatto che $z_1 \rho_h z_2$.

(6) Siano X e ρ_h come in (**3**). Sia $z' := 3 + 3i$ e si prenda $h := 2$ e si consideri la relazione ρ_2 su X. Descrivere "geometricamente" nel piano complesso l'insieme $Z := \{z \in X \mid z \rho_2 z'\}$.

ESERCIZIO 5. Facendo uso del Principio di Induzione (od, eventualmente, di una delle formulazioni ad esso equivalenti) si dimostrino le seguenti asserzioni.

(1) Si ponga $x_0 := x_1 := 1$, e $x_n := 2x_{n-2} + x_{n-1} + 2n - 5$, per ogni $n \geq 2$. Si dimostri che

$$x_n = 2^n - n, \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}\,.$$

(2) Sia $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ la successione dei numeri interi di Fibonacci (i.e., $u_0 := u_1 := 1$, e $u_n := u_{n-1} + u_{n-2}$, per ogni $n \geq 2$). Si dimostri che

$$u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2 = (-1)^{n+1}, \text{ per ogni } n \geq 1\,.$$

ESERCIZIO 6. Sia $\mathbb{N}^+ := \{1, 2, ..., n, ...\}$ l'insieme degli interi positivi. Sull'insieme $X := \mathcal{P}(\mathbb{N}^+) \setminus \{\emptyset\}$ si definisca una relazione " $\leq$ " nella maniera seguente:

$$Y \leq Z \;:\Longleftrightarrow\; (Y = Z) \vee (y|z \;\text{ presi comunque } y \in Y,\, z \in Z)\,, \quad \text{dove } Y, Z \in X\,,$$

$$(\text{cioè}, \quad Y < Z \;:\Longleftrightarrow\; y|z \;\text{ presi comunque } y \in Y,\, z \in Z)\,.$$

(1) Si dimostri che $\leq$ è una relazione di ordine su X.
(2) Si stabilisca se $(X, \leq)$ è totalmente ordinato.
(3) Si determini, se esiste, il minimo (= primo elemento) di $(X, \leq)$.
(4) Si determini, se esiste, il massimo (= ultimo elemento) di $(X, \leq)$.
(5) Si determini, se esiste, una catena (= sottoinsieme totalmente ordinato) infinita in $(X, \leq)$.
(6) Per ciascuno dei seguenti sottoinsiemi di X

$$\mathcal{Y}' := \{\{2,4\},\ \{12\},\ \{5,7\}\} \qquad \mathcal{Y}'' := \{\{m\} \mid m \in \mathbb{N}^+\}$$

si stabilisca se esso ha estremo superiore in $(X, \leq)$ e/o massimo, e in caso affermativo lo si determini.
(7) Fissato in modo arbitrario $r \in \mathbb{N}^+$, sia $r\mathbb{N}^+ := \{rk \mid k \in \mathbb{N}^+\}$. Si verifichi che $r\mathbb{N}^+$ è un elemento massimale di $(X, \leq)$.
(8) Si stabilisca se ogni elemento massimale di X è del tipo $r\mathbb{N}^+$, per qualche $r \in \mathbb{N}^+$.
(9) Esistono insiemi *finiti* $Y \in X$ che siano elementi massimali in $(X, \leq)$?
(10) Si determinino *tutti* gli elementi massimali di $(X, \leq)$.