AL110 - Algebra 1 - A.A. 2011/2012
Valutazione "in itinere" - I Prova

Cognome: .... **Nome:** ....

Matricola (O ALTRO IDENTIFICATIVO) → ☐☐☐☐☐☐
UTILIZZARE LO STESSO IDENTIFICATIVO DEL TEST DI OTTOBRE

esercizio	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	2.1a	2.1b	2.2	3	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6
punti max	2	6	3	2	3	1	1	3	3	2	3	3	2	4	4
valutazione															

esercizio	5.1	5.2	6.1	6.2	6.3	6.4	6.5	6.6	6.7	6.8	6.9	6.10
punti max	3	4	2	2	2	5	3	4	5	3	3	6
valutazione												
TOTALE →					*"bonus"* →				*"malus"* →			

AVVERTENZE : *Svolgere gli esercizi in modo conciso, ma esauriente, nello spazio assegnato.*
– *Fino a* **due punti ulteriori (bonus)** *potranno essere assegnati agli elaborati scritti in modo molto chiaro.*
– *Fino a* **due punti (malus)** *potranno essere* **detratti** *dagli elaborati scritti in modo molto confuso o difficilmente leggibile.*

LEGGERE LE AVVERTENZE

NON SFOGLIARE IL TESTO
PRIMA CHE VENGA DATO UFFICIAMENTE
INIZIO ALLA PROVA DAL DOCENTE

ESERCIZIO 1. **(1)** Enunciare, esplicitando chiaramente ipotesi e tesi, il teorema di divisione con il resto in $\mathbb{Z}$.

(2) Dimostrare, con poche frasi formulate in modo chiaro e conciso, il teorema di divisione con il resto in $\mathbb{Z}$.

(3) Calcolare, con l'algoritmo euclideo delle divisioni successive, il $\mathrm{MCD}(11501, 525)$. Determinare, poi, il $\mathrm{mcm}(11501, 525)$.

(4) Dare esplicitamente una identità di Bézout per il $\mathrm{MCD}(11501, 525)$.

(5) Determinare per quali valori di $\ell \in \mathbb{Z}$ la seguente equazione (diofantea lineare) nelle incognite X ed Y:

$$11501{\cdot}X + 525{\cdot}Y = \ell$$

è risolubile. Poi, per ciascuno di tali valori di ℓ, utilizzando il punto **(4)**, determinare tutte le soluzioni intere della precedente equazione.

SOLUZIONE.

Per **(1)** e **(2)**, vedere gli appunti o i testi consigliati.

(3) L'algoritmo euclideo delle successioni successivo eè descritto sotto:

$$\begin{aligned} 11501 &= \quad 525 \cdot 21 + 476 \\ 525 &= \quad 476 \cdot 1 + 49 \\ 476 &= \quad 49 \cdot 9 + 35 \\ 49 &= \quad 35 \cdot 1 + 14 \\ 35 &= \quad 14 \cdot 2 + 7 \\ 14 &= \quad 7 \cdot 2 + 0\,. \end{aligned}$$

Quindi $\mathrm{MCD}(11501, 525) = 7$.

(4) $7 = 32 \cdot 11501 + (-701) \cdot 525\,.$

(5) La condizione è data da $7 = \mathrm{MCD}(11501, 525) \mid \ell$. Se $7 \cdot \ell' = \ell$ allora dalla soluzione $(x := x(7) := 32,\ y := y(7) := -701)$ dell'equazione

$$11501{\cdot}X + 525{\cdot}Y = 7$$

ricaviamo che $(x := x(\ell) := 32 \cdot \ell',\ y := y(\ell) := -701 \cdot \ell')$ è soluzione di

$$11501{\cdot}X + 525{\cdot}Y = 7 \cdot \ell' = \ell\,.$$

Pertanto tutte le soluzioni di tale equazione sono date da

$$(x_t := x(\ell)_t := 32 \cdot \ell' + 525 \cdot t,\ y_t := y(\ell)_t := -701 \cdot \ell' - 11501 \cdot t) \text{ con } t \in \mathbb{Z}\,.$$

ESERCIZIO 2. **(1)** Enunciare una proposizione logicamente equivalente alla negazione di ciascuna delle seguenti (ovviamente, non è ammessa la formulazione "non è vero che..." o simili):

(a) *Homer Simpson mangia ciambelle colorate e beve birra Duff.*

(b) *In ogni comune della regione secessionista dell'Assurdistan, autoproclamata "Fandonistan del Sud", sono state istituite ronde popolari e varate norme xenofobe.*

.

(2) Date tre proposizioni elementari $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ e $\boldsymbol{R}$ descrivere la tabella di verità della proposizione " $(\boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{R}) \Rightarrow ((\neg \boldsymbol{Q}) \wedge \boldsymbol{P})$ ".

$\boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{Q}$	$\boldsymbol{R}$	$(\boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{R}) \Rightarrow ((\neg \boldsymbol{Q}) \wedge \boldsymbol{P})$
v	v	v	
v	v	f	
v	f	v	
v	f	f	
f	v	v	
f	v	f	
f	f	v	
f	f	f	

.

SOLUZIONE.

(1) **(a)** *Homer Simpson non mangia ciambelle colorate o/e non beve birra Duff.*

(b) *Esiste (almeno) un comune della regione secessionista dell'Assurdistan, autoproclamata "Fandonistan del Sud", nel quale non sono state istituite ronde popolari o/e non sono state varate norme xenofobe.*

(2)

$\boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{Q}$	$\boldsymbol{R}$	$(\boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{R}) \Rightarrow ((\neg \boldsymbol{Q}) \wedge \boldsymbol{P})$
v	v	v	**f**
v	v	f	**f**
v	f	v	**v**
v	f	f	**v**
f	v	v	**f**
f	v	f	**v**
f	f	v	**f**
f	f	f	**v**

ESERCIZIO 3. Il Parlamento del remoto paese Assurdistan è formato da 630 membri, eletti con un opaco sistema elettorale denominato *"Suinum"*. Di questi 630 parlamentari, 314 non sono (ancora) mai stati rinviati a giudizio od inquisiti dall'autorità giudiziaria. I rimanenti appartengono ad almeno uno dei seguenti 3 gruppi:

• Il primo gruppo $(\boldsymbol{A})$ è composto da **31** membri che sono indagati per associazione di tipo mafioso,

• il secondo gruppo $(\boldsymbol{B})$ è composto da **101** membri che sono inquisiti per bancarotta fraudolenta,

• il terzo gruppo $(\boldsymbol{C})$ è composto da **211** membri inquisiti per corruzione, concussione o malversazione.

Sapendo che sono esattamente **13** i membri del Parlamento che appartengono a ciascuna delle tre distinte coppie di gruppi (i.e., $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}$), determinare il numero dei parlamentari che appartengono contemporaneamente ai tre gruppi (i.e., $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}$).

SOLUZIONE.

Detto x il numero da determinare dei parlamentari che appartengono contemporaneamente ai tre gruppi (i.e., $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}$), tale numero si ricava dalla seguente formula:

$$316 = (31 + 101 + 211) - 3 \cdot 13 + x\,.$$

Dunque, $x = 12$.

ESERCIZIO 4. Sia X un insieme non vuoto, sia $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ l'insieme di tutte le relazioni di equivalenza definite su X e sia $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ un sottoinsieme non vuoto di $\boldsymbol{\mathcal{E}}$. Si definisca su X una nuova relazione $\sigma_{\boldsymbol{\mathcal{R}}}$ (che dipende da $\boldsymbol{\mathcal{R}}$) definita nel seguente modo, dati $x_1, x_2 \in X$:

$$x_1 \sigma_{\boldsymbol{\mathcal{R}}} x_2 \;:\Leftrightarrow\; x_1 \rho x_2 \qquad \forall \rho \in \boldsymbol{\mathcal{R}}\,.$$

(1) Stabilire se $\sigma_{\boldsymbol{\mathcal{R}}}$ è oppure non è una relazione di equivalenza su X.

(2) Se per ogni $\rho \in \mathcal{R}$, denotiamo con R_ρ il suo grafico, allora descrivere il grafico della relazione $\sigma_{\boldsymbol{\mathcal{R}}}$ (in funzione dei grafici R_ρ, al variare di $\rho \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$).

(3) Sia $X := \mathbb{C}^\star$ l'insieme dei numeri complessi non nulli e sia h un numero intero positivo fissato. Si definisca su X la seguente relazione, dati $z_1, z_2 \in X$:

$$z_1 \rho_h z_2 \;:\Leftrightarrow\; \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^h \in \mathbb{R}\,.$$

Determinare quali proprietà (tra le seguenti: Riflessiva, Simmetrica, Antisimmetrica, Transitiva, Totale) sono soddisfatte da ρ_h.

(4) Siano $z_1 := 3 - i \cdot 5$ e $z_2 := 7 + i \cdot 2$. Determinare $a, b \in \mathbb{R}$ in modo tale che

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 = a + ib\,.$$

(5) Siano X e ρ_h come in (**3**) e siano

$$z_1 := r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\,, \qquad z_2 := r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

l'espressione in forma polare di z_1 e z_2. Determinare condizioni su r_1 e r_2 e su θ_1 e θ_2 che esprimano in forma equivalente il fatto che $z_1 \rho_h z_2$.

(6) Siano X e ρ_h come in (**3**). Sia $z' := 3 + 3i$, si prenda $h := 2$ e si consideri la relazione ρ_2 su X. Descrivere "geometricamente" nel piano complesso l'insieme $Z := \{z \in X \mid z \rho_2 z'\}$.

SOLUZIONE.

(1) $\sigma_{\boldsymbol{\mathcal{R}}}$ è una relazione di equivalenza, perché ρ è una relazione di equivalenza per ogni $\rho \in \mathcal{R}$.

(2) Denotiamo $\Sigma_{\boldsymbol{\mathcal{R}}}$ il grafico di $\sigma_{\boldsymbol{\mathcal{R}}}$. Allora, è subito visto che

$$\Sigma_{\boldsymbol{\mathcal{R}}} = \bigcap \{R_\rho \mid \rho \in \mathcal{R}\}\,.$$

(3) Si vede facilmente, con verifica diretta, che la relazione ρ_h è Riflessiva, Simmetrica e Transitiva. Possono essere dati facilmente controesempi per mostrare che ρ_h non è né Antisimmetrica (ad esempio, se z_1 e z_2 sono due diversi numeri reali non nulli) né Totale (ad esempio, se $z_1 := 1$ e $(z_2)^2$ è un numero complesso non reale, in altri termini, se scriviamo $z_2 := a + ib$, allora

$$(z_2)^2 = (a^2 - b^2) + 2iab \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \;\Leftrightarrow\; a \neq 0 \,\wedge\, b \neq 0\,).$$

(4)

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 = \frac{-1560}{2809} + i \cdot \frac{-902}{2809}\,.$$

(5) Essendo r_1 e r_2 due numeri reali (positivi), nessuna condizione è richiesta a tali parametri. Mentre, deve accadere che $\mathrm{sen}(h \cdot (\theta_1 - \theta_2)) = 0$, quindi $h \cdot (\theta_1 - \theta_2) = \pi \cdot t$ con $t \in \mathbb{Z}$, cioè $\theta_1 = \theta_2 + \frac{\pi}{h} \cdot t$ per qualche $t \in \mathbb{Z}$.

(6) Osserviamo che $z' = 3(1+1) = 3(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4))$.
Sia $z := \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$, allora

$$z\rho_2 z' \;\Leftrightarrow\; \theta = \pi/4 + t\cdot\pi/2\,,\ \text{per qualche } t \in \mathbb{Z}\,,$$

cioè, $\theta = \pi/4$ o $\theta = 3\pi/4$ per $0 \leq \theta \leq 2\pi$, ovvero il punto z nel piano complesso descrive l'insieme dei punti –differenti dall'origine– della retta bisettrice del I e III quadrante e di quella bisettrice del II e IV quadrante.

ESERCIZIO 5. Facendo uso del Principio di Induzione (od, eventualmente, di una delle formulazioni ad esso equivalenti) si dimostrino le seguenti asserzioni.

(1) Si ponga $x_0 := x_1 := 1$, e $x_n := 2x_{n-2} + x_{n-1} + 2n - 5$, per ogni $n \geq 2$. Si dimostri che
$$x_n = 2^n - n, \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

(2) Sia $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ la successione dei numeri interi di Fibonacci (i.e., $u_0 := u_1 := 1$, e $u_n := u_{n-1} + u_{n-2}$, per ogni $n \geq 2$). Si dimostri che
$$u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2 = (-1)^{n+1}, \text{ per ogni } n \geq 1.$$

SOLUZIONE.

(1) Vogliamo dimostrare che $U := \{n \in \mathbb{N} \mid x_n = 2^n - n\} = \mathbb{N}$.

Base dell'induzione ampia. Poiché $2^0 - 0 = x_0 := 1$ e $2^1 - 1 = x_1 := 1$, si ha $0, 1 \in U$.

Passo induttivo. Supponiamo quindi che $n \geq 1$ e che $\{k \in \mathbb{N} \mid 0 \leq k \leq n\} \subseteq U$. Vogliamo provare che $n+1 \in U$, i.e., $x_{n+1} = 2^{n+1} - (n+1)$.

Poiché $n+1 \geq 2$, si ha $x_{n+1} = 2x_{n-1} + x_n + 2(n+1) - 5$ e, poiché, in particolare, $n, n-1 \in U$ (per ipotesi induttiva), si ha $x_n = 2^n - n, x_{n-1} = 2^{n-1} - (n-1)$. Pertanto con un facile calcolo si ottiene
$$x_{n+1} = 2[2^{n-1} - (n-1)] + 2^n - n + 2(n+1) - 5 = 2^{n+1} - (n+1)$$
L'asserzione segue quindi immediatamente dal Principio di Ampia Induzione.

(2) Posto $\mathbb{N}(1) := \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 1\}$ e $U := \{n \in \mathbb{N}(1) \mid u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2 = (-1)^{n+1}\}$, vogliamo mostrare che $U = \mathbb{N}(1)$.

Base dell'induzione. Ovviamente $1 \in U$, poiché $u_2u_0 - u_1^2 = 1 = (-1)^{1+1}$.

Passo induttivo.Supponiamo adesso che $n \geq 1$ e che $n \in U$, e proviamo che $n+1 \in U$, i.e., $n_{n+2}u_n - u_{n+1}^2 = (-1)^{n+2}$. Poiché $n+2, n+1 \geq 2$ si ha $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$, e quindi
$$\begin{aligned} n_{n+2}u_n - u_{n+1}^2 &= u_n(u_{n+1} + u_n) - u_{n+1}^2 = u_{n+1}(u_n - u_{n+1}) + u_n^2 = \\ &= -(n_{n+1}u_{n-1} - u_n^2) = -(-1)^{n+1} = (-1)^{n+2} \end{aligned}$$
Provato che $n+1 \in U$, l'enunciato segue per Induzione.

ESERCIZIO 6. Sia $\mathbb{N}^+ := \{1, 2, ..., n, ...\}$ l'insieme degli interi positivi. Sull'insieme $X := \mathcal{P}(\mathbb{N}^+) \setminus \{\emptyset\}$ si definisca una relazione " $\leq$ " nella maniera seguente:

$$Y \leq Z :\Longleftrightarrow (Y = Z) \vee (y|z \text{ presi comunque } y \in Y,\ z \in Z)\,, \quad \text{dove } Y, Z \in X\,,$$

$$(\text{cioè,} \quad Y < Z :\Longleftrightarrow y|z \text{ presi comunque } y \in Y,\ z \in Z)\,.$$

(1) Si dimostri che $\leq$ è una relazione di ordine su X.
(2) Si stabilisca se $(X, \leq)$ è totalmente ordinato.
(3) Si determini, se esiste, il minimo (= primo elemento) di $(X, \leq)$.
(4) Si determini, se esiste, il massimo (= ultimo elemento) di $(X, \leq)$.
(5) Si determini, se esiste, una catena (= sottoinsieme totalmente ordinato) infinita in $(X, \leq)$.
(6) Per ciascuno dei seguenti sottoinsiemi di X

$$\mathcal{Y}' := \{\{2, 4\},\ \{12\},\ \{5, 7\}\} \qquad \mathcal{Y}'' := \{\{m\} \mid m \in \mathbb{N}^+\}$$

si stabilisca se esso ha estremo superiore in $(X, \leq)$ e/o massimo, e in caso affermativo lo si determini.
(7) Fissato in modo arbitrario $r \in \mathbb{N}^+$, sia $r\mathbb{N}^+ := \{rk \mid k \in \mathbb{N}^+\}$. Si verifichi che $r\mathbb{N}^+$ è un elemento massimale di $(X, \leq)$.
(8) Si stabilisca se ogni elemento massimale di X è del tipo $r\mathbb{N}^+$, per qualche $r \in \mathbb{N}^+$.
(9) Esistono insiemi *finiti* $Y \in X$ che siano elementi massimali in $(X, \leq)$?
(10) Si determinino *tutti* gli elementi massimali di $(X, \leq)$.

SOLUZIONE.

(1) Per definizione, $\leq$ è riflessiva.

Proprietà antisimmetrica. Supponiamo adesso che $Y, Z \in X$ e che $Y \leq Z, Z \leq Y$. Se –per assurdo– fosse $Y \neq Z$, potremmo scegliere, senza perdita di generalità, un elemento $y_0 \in Y \setminus Z$. Inoltre, essendo $Z \neq \emptyset$, fissiamo un elemento $z_0 \in Z$. Per ipotesi si ha $y|z$ e $z|y$, per ogni scelta di $(y, z) \in Y \times Z$. In particolare, si ha $y_0|z_0$ e $z_0|y_0$ e quindi $y_0 = z_0 \in Z$, contraddizione. Siano adesso $Y, Z, T \in X$ tali che $Y \leq Z, Z \leq T$ e assumiamo, per contraddizione che $Y \not\leq T$. In particolare, esistono elementi $y_0 \in Y, t_0 \in T$ tali che y_0 non divide t_0. Scegliamo un elemento $z_0 \in Z$. Poiché deve aversi necessariamente $Y \neq Z$ e $Z \neq T$ (altrimenti $Y \leq T$), $y|z$ e $z|t$, per ogni $(y, z, t) \in Y \times Z \times T$, e quindi $y|t$ per ogni $(y, t) \in Y \times T$. In particolare si ha $y_0|t_0$, contraddizione.

(2) $(X, \leq)$ non è totalmente ordinato, perché, per esempio, $\{2\} \not\leq \{3\}$ e $\{3\} \not\leq \{2\}$.

(3) Poiché 1 divide ogni numero naturale, $\{1\}$ è il minimo di $(X, \leq)$.

(4) Mostreremo che $(X, \leq)$ non ha maggioranti, e da ciò seguirà immediatamente che non ha massimo. Per assurdo, supponiamo che un insieme $T \in X$ sia un maggiorante per X. Preliminarmente osserviamo che, per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, si ha $\{n\} \neq T$ (infatti $\{n\} < \{2n\}$ e quindi $\{n\}$ non può essere un maggiorante). Pertanto, in particolare, per ogni numero primo p si deve avere $\{p\} < T$. Ne segue che, scelto un elemento $t_0 \in T$ (si ricordi che $T \neq \emptyset$), si deve avere $p|t_0$, per ogni numero primo p, contro il Teorema Fondamentale dell'Aritmetica. L'assurdo proviene dall'avere assunto che T fosse un maggiorante di X. Dunque $(X, \leq)$ non ha maggioranti.

(5) Per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, sia $T_n := \{2^n\}$. Dalla definizione segue subito $T_n < T_{n+1}$, per ogni intero $n \geq 1$. Dunque $\{T_n \mid n \in \mathbb{N}^+\}$ è una catena infinita in $(X, \leq)$.

(6) Sia $d := \mathrm{mcm}(5, 7, 12)$. Evidentemente, $\{d\}$ è un maggiorante per $\mathcal{Y}'$. Sia adesso T un maggiorante di $\mathcal{Y}'$, e sia $t \in T$. Poiché $T \neq \{2, 4\}, T \neq \{12\}, T \neq \{5, 7\}$, ogni elemento di ogni insieme in $\mathcal{Y}'$ divide t. In particolare, $5, 7, 12$ dividono t, e quindi $d|t$. Ciò prova che $\{d\} \leq T$, da cui $\{d\} = \sup_{\leq}(\mathcal{Y}')$. Con un argomento simile a quello dato in **(4)** si prova che $\mathcal{Y}''$ non ha maggioranti, e dunque non ha estremo superiore.

(7) Per assurdo, supponiamo esista un elemento $T \in X$ tale che $r\mathbb{N}^+ < T$, e scegliamo un elemento $t_0 \in T$. Segue che, per ogni numero primo p, $rp|t_0$, e a fortiori $p|t_0$. Ciò viola il Teorema Fondamentale dell'Aritmetica.

(8) No. Infatti, per esempio, $2\mathbb{N}^+ \setminus \{2\}$ è ancora un elemento massimale di $(X, \leq)$ (per provare ciò, si usi lo stesso argomento dato in **(7)**) ed evidentemente non è del tipo $r\mathbb{N}^+$, per ogni $r \in \mathbb{N}^+$.

(9) No. Facciamo vedere che ogni insieme finito (e non vuoto) $T \in X$ non è un elemento massimale in $(X, \leq)$. Se T è un singoletto (i.e., un insiemo con un solo elemento), allora T non è massimale in $(X, \leq)$ (si usi un passaggio dell'argomento dato in **(4)**). Supponiamo quindi che T sia finito e abbia almeno 2 elementi. Detto d il minimo comune multiplo degli elementi di T, segue immediatamente dalla definizione $T < \{d\}$, e quindi T non è massimale.

(10) è un esercizio per casa ☺.