Università degli Studi di Roma Tre

Corso di Laurea in Matematica – a.a. 2011/2012

AL110 – Algebra 1 – Prova utile alla valutazione in itinere ⋄ 13 Ottobre 2011

Nome e Cognome ________________________________ **Identificativo** ☐☐☐☐☐☐

1. Siano X, Y, Z insiemi.
☐ Se $(X \cup Y) \cap Z = X \cup (Y \cap Z)$, allora $X = Z$.
☐ Se $Z \subseteq X$, allora $(X \cup Y) \cap Z = X \cup (Y \cap Z)$.
■ $X \cup (Y \cap Z) \supseteq X \cap Y \cap Z$.
■ $(X \cup Y) \cap Z = X \cup (Y \cap Z)$ se, e soltanto se, $X \subseteq Z$.
■ $(X \cup Y) \cap Z \subseteq Y$ o/e $(X \cup Y) \cap Z \subseteq Z$.
☹ Non rispondo.

2. Siano P, Q, X proposizioni logiche. Per quale/i valore/i di X la proposizione logica $\neg(P \vee Q) \Longrightarrow X$ è una tautologia?
■ $X := (P \Longrightarrow Q)$.
■ $X := (Q \Longrightarrow (\neg P))$.
☐ $X := \neg(P \Longrightarrow (\neg Q))$.
☐ $X := \neg((\neg P) \Longrightarrow (\neg Q))$.
☐ Nessun delle precedenti è vera.
☹ Non rispondo.

3. Consideriamo l'insieme $X := \{\{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}\}$. Allora:
☐ $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \subseteq X$.
■ $\{\{\emptyset\}\} \in \mathcal{P}(X)$.
■ $X \setminus \{\{\emptyset\}\} = \{\{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}\}$.
■ $X \setminus \{\emptyset\} = X$.
☐ Nessun delle precedenti è vera.
☹ Non rispondo.

4. Siano A, B insiemi. Allora:
■ $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
☐ Se $A \neq \emptyset$, allora si ha sempre $A \not\subseteq \mathcal{P}(A)$.
☐ Può avvenire che $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ e $A \not\subseteq B$.
■ Se $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$, allora $A = B$.
☐ Nessuna delle precedenti asserzioni è corretta.
☹ Non rispondo.

5. Siano $x, y \in \mathbb{Z}$, non entrambi nulli.
☐ Se esistono $a, b \in \mathbb{Z}$ tali che $ax + by = 2$ allora $\mathrm{MCD}(x, y) = 2$.
■ Se esistono $a, b \in \mathbb{Z}$ tali che $ax + by = 1$ allora $\mathrm{MCD}(x, y) = 1$.
☐ Se esistono $a, b \in \mathbb{Z}$ tali che $ax + by = 2$ allora $\mathrm{MCD}(x, y) > 2$.
■ Se $\mathrm{MCD}(x, y) = 1$, allora esistono $a, b \in \mathbb{Z}$ tali che $ax + by = 2$.
☐ Le precedenti asserzioni sono errate.
☹ Non rispondo.

6. Sia X un insieme non vuoto. Ricordiamo che una collezione non vuota $\mathcal{F}$ di sottoinsiemi non vuoti di X si dice *un filtro su* X se: (1) $Y \cap Z \in \mathcal{F}$, per ogni $Y, Z \in \mathcal{F}$, (2) se $Y \in \mathcal{F}$ e $Y \subseteq Z \subseteq X$, allora $Z \in \mathcal{F}$. Per ogni $x \in X$, si ponga $\mathcal{F}_x := \{Y \subseteq X : x \in Y\}$. Allora:
■Per ogni, $x, y \in X$, con $x \neq y$, $\mathcal{F}_x, \mathcal{F}_y$ sono filtri su X e $\mathcal{F}_x \neq \mathcal{F}_y$.
■ Per ogni $x, y \in X$, $\mathcal{F}_x \cap \mathcal{F}_y$ è un filtro su X.
☐ Per ogni $x, y \in X$, $\mathcal{F}_x \cup \mathcal{F}_y$ è un filtro su X.
■ Per ogni $x \in X$ e per ogni filtro $\mathcal{F}$ su X tale che $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{F}_x$, si ha $\mathcal{F} = \mathcal{F}_x$.
☐ Le precedenti asserzioni sono errate.
☹ Non rispondo.

7. Sia X un insieme e $\mathcal{F} := \{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ una collezione di sottoinsiemi di X tale che $\bigcap\{A_n : n \in \mathbb{N}\} = A_0$. Allora:
☐ $\mathcal{F} = \{A_0\}$.
☐ $A_0 \subsetneq A_n$, per almeno un numero naturale n.
■ $A_0 \subseteq A_n$, per ogni $n \in \mathbb{N}$.
☐ Esiste un numero naturale n tale che $A_n \subsetneq A_0$.
☐ $A_0 \subsetneq \bigcap\{A_n : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$.
☹ Non rispondo.

8. Siano X, Y insiemi. Allora:
☐ $\mathcal{P}(X \setminus Y) \subseteq \mathcal{P}(X) \setminus \mathcal{P}(Y)$.
☐ $\mathcal{P}(X \setminus Y) \supseteq \mathcal{P}(X) \setminus \mathcal{P}(Y)$.
☐ $\mathcal{P}(X \setminus Y) \not\subseteq \mathcal{P}(X)$.
☐ $\mathcal{P}(X \setminus Y) \subseteq \mathcal{P}(Y)$.
■ Le precedenti asserzioni sono errate.
☹ Non rispondo.
9. Sia X un sottoinsieme di $\mathbb{N}$ tale che $10 \notin X$ e, per ogni $n \in X$, si ha $n+1 \in X$. Allora:
■ Se $n \in X$, allora $n + 10 \in X$.
☐ $0 \in X$.
■ $1 \notin X$.
☐ Se $2011 \in X$, allora, ogni numero naturale n tale che $11 \leq n \leq 2011$ appartiene a X.
☐ Se $11 \in X$, allora $X \supsetneq \{n \in \mathbb{N} : n \geq 11\}$.
☹ Non rispondo.
10. Siano P, Q, R proposizioni logiche. Si scriva la tavola di verità della proposizione S definita da

$$S := (P \vee Q) \Longrightarrow (\neg R)\,.$$

P	Q	R	S
V	V	V	**F**
V	V	F	**V**
V	F	V	**F**
V	F	F	**V**
F	V	V	**F**
F	V	F	**V**
F	F	V	**V**
F	F	F	**V**

11 Determinare tra le seguenti proposizioni logiche quelle che sono logicamente equivalenti alla *negazione* della seguente proposizione: *"Il Presidente dell'Assurdistan intrattiene alcuni sudditi selezionati con riunioni conviviali o/e cene eleganti".*
☐ *"Il Presidente dell'Assurdistan non organizza riunioni conviviali".*
☐ *"Il Presidente dell'Assurdistan non organizza cene eleganti".*
■ *"Il Presidente dell'Assurdistan non intrattiene sudditi selezionati né con riunioni conviviali né con cene eleganti".*
☐ *"Il Parlamento dell'Assurdistan ha prontamente tagliato le spese di rappresentanza al Presidente".*
☐ *"Il Nunzio Apostolico in Assurdistan ha notato comportamenti e stili di vita difficilmente compatibili con la dignità delle persone e il decoro delle istituzioni e della vita pubblica".*
☐ Nessuna delle precedenti.
☹ Non rispondo.
12. Sia n un intero positivo e sia $n! := n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1$. Quali tra le seguenti affermazioni sono vere:
☐ $n! > 2^n$, per ogni $n \geq 3$.
■ $n! > 2^n$, per ogni $n \geq 4$.
☐ $n! \geq 2^n$, per ogni $n \geq 1$.
■ $n! \neq 2^n$, per ogni $n \geq 1$.
☐ Nessuna delle precedenti.
☹ Non rispondo.
Le regole del gioco.
(1) *Verranno attribuiti* **2 punti** *per ogni domanda alla quale si risponde pienamente (i.e. se vengono scelte TUTTE E SOLE le risposte corrette).*
(2) *Verrà attribuito* **1 punto** *per ogni domanda alla quale si risponde parzialmente E in modo corretto (i.e., se si scelgono SOLTANTO risposte corrette, ma non tutte le risposte corrette vengono scelte).*
(3) *Non verranno attribuiti punti alle domande a cui non si risponde (i.e. se si segna ☹).*
(4) *Verranno* **tolti 2 punti** *per ogni domanda per la quale ALMENO una delle opzioni scelte è errata.*
(5) *Durante lo svolgimento della prova NON È AMMESSA ALCUNA FORMA DI COLLABORAZIONE, E NON È AMMESSO L'USO DI LIBRI O APPUNTI. Verrà tolto un punto al primo richiamo, verranno tolti 2 punti al secondo richiamo. Al terzo richiamo la prova verrà invalidata.*
Punteggio. *Si indichi con x la somma algebrica dei punti ottenuti, come appena spiegato, con y il numero di risposte corrette scelte e con z il numero di risposte corrette da scegliere (***N.B.** $z = 22$*). Il punteggio finale t è dato da $t := x + 10\frac{y}{z}$ (***N.B. max $x = 24$; max $t = 34$; min $t = -24$***).*