AL110 - Algebra 1 - A.A. 2011/2012
Prova d'Esame: APPELLO A

Cognome: .... **Nome:** ....

Matricola (O ALTRO IDENTIFICATIVO) → ☐☐☐☐☐☐

esercizio	1a	1b	1c	1d	1e1	1e2	1e3	1e4	2a	2b	2c	2d	3a	3b	3c	3d	3e
punti max	4	3	3	3	3	4	4	9	1	2	2	3	2	3	3	3	4
valutazione																	

esercizio	4a	4b	5a	5b1	5b2	5b3	6a	6b	6c1	6c2	6c3	6c4
punti max	5	3	3	1	3	6	1	3	4	3	4	5
valutazione												
TOTALE →			*"bonus"* →				*"malus"* →					

AVVERTENZE : *Svolgere gli esercizi in modo conciso, ma esauriente, nello spazio assegnato in questo fascicolo.* **Non consegnare altri fogli.**
Lo svolgimento preliminare ed i calcoli possono essere effettuati nei fogli bianchi che vengono consegnati agli studenti assieme a questo fascicolo. Tali fogli non devono essere riconsegnati.
– *Fino a* **due punti ulteriori (bonus)** *potranno essere assegnati agli elaborati scritti in modo molto chiaro.*
– *Fino a* **due punti (malus)** *potranno essere* **detratti** *dagli elaborati scritti in modo molto confuso o difficilmente leggibile.*

LEGGERE LE AVVERTENZE

NON SFOGLIARE IL TESTO
PRIMA CHE VENGA DATO UFFICIAMENTE INIZIO ALLA PROVA DAL DOCENTE

ESERCIZIO 1. Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ un numero reale fissato e sia $f_\lambda : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita ponendo

$$f_\lambda(x) := \begin{cases} \dfrac{2x-1}{x-5} & \text{se } x \in \mathbb{R},\ x \neq 5,\ x \neq 1/2 \\ 2+\lambda & \text{se } x = 5 \\ \lambda & \text{se } x = 1/2 \end{cases}$$

(a) Si determini $\mathrm{Im}(f_\lambda)$, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.
(b) Si discuta iniettività e suriettività di f_λ, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.
(c) Detta $\boldsymbol{\kappa}_{f_\lambda}$ la relazione di equivalenza associata a f_λ, si determini la classe di equivalenza di $[1/2]_{\boldsymbol{\kappa}_{f_\lambda}}$, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.
(d) Si determinino gli eventuali valori di λ per cui la restrizione di f_λ a $\mathbb{R} \setminus \{5\}$ risulta iniettiva.
(e) Si consideri ora l'insieme

$$\boldsymbol{\Sigma} := \{(Y, \varphi) \mid Y \subseteq \mathbb{R},\ \varphi : Y \to \mathbb{R} \text{ è una funzione iniettiva}\}$$

e si definisca su $\boldsymbol{\Sigma}$ la seguente relazione $\preceq$ ponendo

$$(Y, \varphi) \preceq (Z, \psi) :\Longleftrightarrow Y \subseteq Z \quad \text{e} \quad \psi|_Y = \varphi$$

(1) Si dimostri che $\preceq$ è un ordine parziale su $\boldsymbol{\Sigma}$.
(2) Posto $\overline{Y} := \mathbb{R} \setminus \{5, 1/2\}$ e detta $h : \overline{Y} \longrightarrow \mathbb{R}$ la restrizione di f_λ a $\overline{Y}$, si verifichi che $(\overline{Y}, h) \in \boldsymbol{\Sigma}$ e si stabilisca se $(\overline{Y}, h)$ è un elemento massimale di $(\boldsymbol{\Sigma}, \preceq)$.
(3) Si trovino, se esistono, tutti gli elementi massimali (Z, ψ) di $\boldsymbol{\Sigma}$ tali che $(\overline{Y}, h) \preceq (Z, \psi)$.
(4) Si provi che ogni catena (cioè, sottoinsieme totalmente ordinato) di $\boldsymbol{\Sigma}$ ha un maggiorante (*dentro* $\boldsymbol{\Sigma}$).

ESERCIZIO 2. Sia $f : \mathbb{Z} \to (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})$ l'applicazione definita ponendo

$$f(x) := ([x]_5, [x]_{11}), \quad \text{al variare di } x \in \mathbb{Z}\,.$$

(a) Stabilire se $f : \mathbb{Z} \to (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})$ è un omomorfismo dall'anello $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ all'anello $((\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}), +, \cdot)$ (quest'ultimo con le operazioni di somma e prodotto definite "componente per componente").

(b) Determinare $\mathrm{Im}(f)$ e, se f è un omomorfismo, $\mathrm{Ker}(f)$.

(c) Verificare se, nell'anello $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, gli ideali $5\mathbb{Z} \cap 11\mathbb{Z}$ e $55\mathbb{Z}$ sono confrontabili (rispetto all'inclusione insiemistica).

(d) Descrivere esplicitamente $f^{-1}(\{([4]_5, [3]_{11})\})$.

ESERCIZIO 3.

(a) Dare la definizione di sottogruppo normale di un gruppo.

(b) Dare un esempio esplicito di un sottogruppo normale in un gruppo non abeliano.

(c) Sia $f : (G, \cdot) \to (G', \cdot)$ un omomorfismo di gruppi. Enunciare per f il Teorema Fondamentale di Omomorfismo.

(d) Stabilire se $h : \mathbb{Z} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, definita ponendo $h((x, y)) := [x]_3$, al variare di $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$, è un omomorfismo dal gruppo $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}, +)$ (con l'operazione di somma definita "componente per componente") al gruppo $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +)$. In caso positivo, applicare il Teorema Fondamentale dell'Omomorfismo ad h, descrivendone le conseguenze.

(e) Si consideri la permutazione

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 7 & 1 & 6 \end{pmatrix} \in S_7$$

e sia $G :=< \sigma >$. Si determini il numero di elementi di G e tutti i suoi sottogruppi, esibendo per ciascuno di essi un generatore.

ESERCIZIO 4. Sia $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ la successione dei numeri di Fibonacci (i.e., $u_0 := 0$, $u_1 := 1$ e $u_{n+1} := u_n + u_{n-1}$, per ogni $n \geq 1$).

(a) Si dimostri in maniera dettagliata (usando un appropriato metodo di induzione) che, presi comunque numeri interi $\ell,\ n \geq 1$, si ha

$$u_\ell u_n + u_{\ell-1} u_{n-1} = u_{\ell+n-1}\,.$$

Si deduca che

$$u_{2n} = (u_{n-1} + u_{n+1})u_n = (2u_{n-1} + u_n)u_n\,.$$

(b) Si dimostri utilizzando l'algoritmo euclideo delle divisioni successive che, per ogni $n \geq 0$,

$$\mathrm{MCD}(u_{n+2}, u_{n+1}) = u_2 = 1\,.$$

ESERCIZIO 5.

(a) Per ogni $a \in \mathbb{Z}$, si consideri il polinomio $f_a(T) := T^3 + T^2 + aT + 2 \in \mathbb{Z}[T]$. Si determinino i valori di $a \in \mathbb{Z}$ per i quali $f_a(T)$ è irriducibile in $\mathbb{Q}[T]$ e in $\mathbb{Z}[T]$.

(b) Si consideri l'anello $A := (\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}, +, \cdot)$, e sia T un'indeterminata su A.

(1) Fra tutti i polinomi di $A[T]$ del tipo
$$f_a(T) := [5]_{24} + [4]_{24}T - aT^2 (\text{al variare di } a \in A)$$
si determini l'unico polinomio tale che $f_a([5]_{24}) = [0]_{24}$, indicando esplicitamente il valore di $a \in A$ corrispondente al polinomio trovato.

(2) Denotato con $\overline{a}$ il valore di $a \in A$ determinato nel punto precedente, si stabilisca se il polinomio $f_{\overline{a}}(T)$ è invertibile in $A[T]$, motivando la risposta.

(3) Identificando canonicamente $A[T]$ con un sottoanello dell'anello delle serie di potenze formali $A[\![T]\!]$, possiamo pensare $f_{\overline{a}}(T)$ come una serie di potenze formali. Si dimostri che $f_{\overline{a}}(T)$ è invertibile in $A[\![T]\!]$, descrivendo i coefficienti della serie di potenze formali $g(T) := \sum_{n\in\mathbb{N}} g_n T^n \in A[\![T]\!]$ tale che $f_{\overline{a}}(T)g(T) = 1$.

ESERCIZIO 6. Si consideri il campo $\mathbb{F}_3 := (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +, \cdot)$ e sia $A := \mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3$. In modo naturale, A eredita da $\mathbb{F}_3$ una struttura di anello (commutativo) denotato con $(A, +, \cdot)$, le cui operazioni di somma e prodotto sono definite "componente per componente".

(a) Si verifichi che $(A, +, \cdot)$ (con le operazioni definite sopra) è un anello unitario, e si stabilisca se è un campo.

(b) Si determinino tra i nove elementi di $(A, +, \cdot)$ gli elementi invertibili ed i divisori dello zero.

(c) Si preservi su A la stessa struttura additiva definita sopra (cioè, somma definita componente per componente), ma si definisca la seguente nuova operazione $\star : A \times A \longrightarrow A$ ponendo

$$(a, b) \star (\alpha, \beta) := (a\alpha + b\beta, a\beta + b\alpha) \qquad \text{al variare di } (a, b), (\alpha, \beta) \in A$$

e si assuma (senza verificarlo) che $(A, +, \star)$ è un anello.

(1) Si dimostri che $(A, +, \star)$ è commutativo e unitario, e si stabilisca se $(A, +, \star)$ è un dominio.

(2) Si provi che il sottoinsieme (diagonale) $I := \{(x, x) \mid x \in \mathbb{F}_3\}$ è un ideale proprio di $(A, +, \star)$, mentre I non è un ideale dell'anello $(A, +, \cdot)$.

(3) Si provi che I è un ideale principale di $(A, +, \star)$, e se ne esibisca un generatore, cioè, un elemento $a \in A$ tale che $a \star A = I$.

(4) Si provi che l'applicazione $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{F}_3$ definita ponendo $\varphi((a, b)) := a - b$ è un omomorfismo suriettivo dall'anello $(A, +, \star)$ al campo $(\mathbb{F}_3, +, \cdot)$, e si deduca che A/I è un campo.