AL110 - Algebra 1 - A.A. 2011/2012
Prova d'Esame: APPELLO B

Cognome: .... **Nome:** ....

Matricola (O ALTRO IDENTIFICATIVO) → ☐☐☐☐☐☐

esercizio	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	3.1	3.2	3.3a	3.3b	3.3c
punti max	3	3	3	3	3	2	2	2	2	2	2	3	2	3	3
valutazione															

esercizio	4.1	4.2	4.3	4.4a	4.4b	5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	6.1	6.2	6.3	6.4	6.5	6.6
punti max	3	8	4	3	3	3	3	3	6	6	3	4	4	6	4	4
valutazione																
TOTALE →									*"bonus"* →				*"malus"* →			

AVVERTENZE : *Svolgere gli esercizi in modo conciso, ma esauriente, nello spazio assegnato in questo fascicolo.* **Non consegnare altri fogli.**
Lo svolgimento preliminare ed i calcoli possono essere effettuati nei fogli bianchi che vengono consegnati agli studenti assieme a questo fascicolo. Tali fogli non devono essere riconsegnati.
– *Fino a* **due punti ulteriori (bonus)** *potranno essere assegnati agli elaborati scritti in modo molto chiaro.*
– *Fino a* **due punti (malus)** *potranno essere* **detratti** *dagli elaborati scritti in modo molto confuso o difficilmente leggibile.*

LEGGERE LE AVVERTENZE

NON SFOGLIARE IL TESTO
PRIMA CHE VENGA DATO UFFICIAMENTE INIZIO ALLA PROVA DAL DOCENTE

ESERCIZIO 1. **(1)** Siano α, β due interi fissati. Si consideri l'applicazione:

$$\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}\,, \quad x \mapsto \alpha x + \beta\,,$$

e si ponga per induzione $\varphi^n := \varphi \circ \varphi^{n-1}$, per ogni $n \geq 2$ (dove, ovviamente, $\varphi^1 := \varphi$).
Provare per induzione su $n \geq 1$ che vale una delle seguenti formule:

(a) $\varphi^n(x) = \beta + \beta\alpha + \beta\alpha^2 + \alpha^n x\,;$
(b) $\varphi^n(x) = \beta(\alpha^n + 1) - \beta\alpha + \alpha^n x\,;$
(c) $\varphi^n(x) = \beta(\alpha^n - 1) + \alpha^n x\,;$
(d) $\varphi^n(x) = \beta\frac{(\alpha^n - 1)}{(\alpha - 1)} + \alpha^n x\,.$

(2) Stabilire eventuali condizioni sugli interi α e β in modo tale che l'applicazione $\varphi^n : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, sia biiettiva, per ogni $n \geq 1$.

(3) Nel caso in cui φ sia biiettiva, descrivere esplicitamente $\left(\varphi^3\right)^{-1} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}\,.$

(4) Stabilire eventuali condizioni sugli interi α e β in modo tale che l'applicazione $\varphi : (\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}, +)$ sia un omomorfismo di gruppi.

(5) Stabilire eventuali condizioni sugli interi α e β in modo tale che l'applicazione $\varphi : (\mathbb{Z}, +, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{Z}, +, \cdot)$ sia un omomorfismo di anelli.

ESERCIZIO 2. Sia G l'insieme delle matrici del tipo seguente:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \qquad \text{con } a, b, c \in \mathbb{R}\,,\ ac \neq 0\,.$$

(1) Mostrare che $(G, \cdot\ )$ è un sottogruppo del gruppo moltiplicativo di matrici $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R}) := \{A \in \boldsymbol{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\}$.

(2) Si determini esplicitamente (descrivendo le entrate) la matrice $A^{-1} \in G$, se

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in G\,.$$

(3) Stabilire se $(G, \cdot)$ è un gruppo abeliano.

(4) Sia H' l'insieme delle matrici del tipo seguente:

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{con } b \in \mathbb{R}\,,\ b \geq 0.$$

Stabilire se H' è un sottogruppo di $(G, \cdot)$ e, nel caso in cui sia un sottogruppo, stabilire se H' è un sottogruppo normale.

(5) Sia H'' l'insieme delle matrici del tipo seguente:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}, \qquad \text{con } a, c \in \mathbb{R}\,,\ ac \neq 0.$$

Stabilire se H'' è un sottogruppo di $(G, \cdot)$ e, nel caso in cui sia un sottogruppo, stabilire se H'' è un sottogruppo normale.

ESERCIZIO 3.

(1) Determinare per quali valori dei parametri λ, con $1 \leq \lambda \leq 20$, e μ, con $1 \leq \mu \leq 15$, il seguente sistema di congruenze è risolubile:

$$\begin{cases} 7X \equiv \lambda \pmod{21} \\ 4X \equiv \mu \pmod{16} \\ 8X \equiv 10 \pmod{13} \end{cases} .$$

(2) Per i più piccoli valori interi positivi di λ (con $1 \leq \lambda \leq 20$) e μ (con $1 \leq \mu \leq 15$) per i quali il sistema precedente è risolubile, determinare esplicitamente tutte le sue soluzioni.

(3) Sia $f : \mathbb{Z} \to (\mathbb{Z}/21\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})$ l'applicazione definita ponendo

$$f(x) := ([x]_{21}, [x]_{16}, , [x]_{13}), \;\text{ al variare di } x \in \mathbb{Z}\,.$$

(a) Stabilire se $f : \mathbb{Z} \to (\mathbb{Z}/21\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})$ è un omomorfismo dall'anello $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ all'anello prodotto diretto $((\mathbb{Z}/21\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}), +, \cdot)$ (quest'ultimo con le operazioni di somma e prodotto definite "componente per componente").

(b) Determinare $\mathrm{Im}(f)$ e, se f è un omomorfismo, $\mathrm{Ker}(f)$.

(c) Descrivere esplicitamente $f^{-1}(\{([3]_{21}, [5]_{16}, [7]_{13})\})$.

ESERCIZIO 4. (1) Enunciare il criterio di irriducibilità di Eisenstein per polinomi in $\mathbb{Z}[T]$.

(2) Dare una dimostrazione concisa, ma completa, del criterio di irriducibilità di Eisenstein per polinomi in $\mathbb{Z}[T]$.

(3) Dimostrare che i polinomi

$$3T^3 + 3T^2 + 3T + 1 \quad \text{e} \quad T^3 + 3T^2 + 3T + 3$$

sono irriducibili in $\mathbb{Z}[T]$, utilizzando appropriate formulazioni del criterio di Eisenstein.

(4) Siano dati $f(T) := T^3 - 3T^2 + 2T - 6$ e $g(T) := T^2 - 8T + 15$ due polinomi in $\mathbb{Z}[T] \subset \mathbb{Q}[T]$.

(4a) Utilizzando l'algoritmo euclideo delle divisioni successive, calcolare in $\mathbb{Q}[T]$ il polinomio *monico* $d(T) := \mathrm{MCD}(f(T), g(T))$ e determinare due polinomi $\alpha(T),\ \beta(T) \in \mathbb{Q}[T]$ in modo tale che:

$$d(T) = \alpha(T)f(T) + \beta(T)g(T) \qquad \text{[Identità di Bézout in } \mathbb{Q}[T]] \,.$$

(4b) Utilizzando il Teorema di Ruffini, determinare tutte le eventuali radici in $\mathbb{Q}$ di $f(T)$ e di $g(T)$.

ESERCIZIO 5. Siano T un'indeterminata su $\mathbb{Q}$ e sia $A := \mathbb{Z} + T\mathbb{Q}[T]$ l'insieme dei polinomi di $\mathbb{Q}[T]$ il cui termine noto è intero, i.e.,

$$A := \mathbb{Z} + T\mathbb{Q}[T] := \{f(T) \in \mathbb{Q}[T] \mid f(0) \in \mathbb{Z}\}\,.$$

(1) Si dimostri che A è un sottoanello di $(\mathbb{Q}[T], +, \cdot)$. Si stabilisca, inoltre, se A è un ideale di $(\mathbb{Q}[T], +, \cdot)$.

(2) Si stabilisca se $B := \{f(T) \in A \mid f(0) \in \mathbb{N}\} =: \mathbb{N} + T\mathbb{Q}[T]$ è un sottoanello e/o un ideale di $(A, +, \cdot)$.

(3) Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia $\mathfrak{I}_n := \{f(T) \in A \mid f(0) \in n\mathbb{Z}\} =: n\mathbb{Z} + T\mathbb{Q}[T]$. Si dimostri che $\mathfrak{I}_n$ è un ideale di $(A+, \cdot)$.

(4) Utilizzando il Teorema Fondamentale dell'Omomorfismo, si determinino *tutti e soli* i valori dell'intero n per cui l'anello-quoziente $(A/\mathfrak{I}_n, +, \cdot)$ è un dominio.

(5) Si calcoli, se esiste, l'inverso dell'elemento $[T^5 + T^4 + 3]_{\mathfrak{I}_{28}} := (T^5 + T^4 + 3) + \mathfrak{I}_{28}$ $(\in A/\mathfrak{I}_{28})$ nell'anello-quoziente $(A/\mathfrak{I}_{28}, +, \cdot)$.

ESERCIZIO 6. Si risolva, con un argomento chiaro e conciso, ciascuna delle seguenti questioni.

(1) Per ogni numero intero h, si calcoli $\mathrm{MCD}(h+1, 3h+4)$.

(2) Siano dati $(G, \cdot)$ un gruppo, 1 il suo elemento unità, $h \in \mathbb{N}$, e H e L sottogruppi di $(G, \cdot)$ aventi rispettivamente $h+1$ e $3h+4$ elementi. Si provi che $H \cap L = \{1\}$.

(3) Si calcoli il resto della divisione di 2012^{2012} per 25 e, poi, si calcoli il resto della divisione di 2012^{2012} per 4.

(4) Utilizzando il precedente punto **(3)**, si calcolino le ultime due cifre (nella scrittura in base 10) di 2012^{2012}.

(5) Sull'insieme $X := \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$ si consideri la relazione $\preceq$ definita ponendo

$$(a, b) \preceq (c, d) \ :\Longleftrightarrow \ \text{“}a \text{ divide } c\text{”} \ \text{ e } \ \text{“}b \text{ divide } d\text{”}\,,$$

e si dia per scontato che $(X, \preceq)$ è un insieme ordinato (cioè che la relazione $\preceq$ sopra introdotta sia riflessiva, antisimmetrica e transitiva).
Si determinino eventuali estremo inferiore e superiore dell'insieme

$$Y := \{(1, 2), (2, 3), (4, 6)\} \ \text{ in } \ (X, \preceq)\,,$$

precisando se si tratta di minimo o massimo.

(6) Si determinino le radici quarte del numero complesso $z := 1 + i$ (cioè, si determinino tutti i numeri complessi $w \in \mathbb{C}$ tali che $w^4 = z$).