AL110 - Algebra 1 - A.A. 2011/2012
Prova d'Esame: APPELLO C - Giugno 2012

Cognome: .... **Nome:** ....

Matricola (O ALTRO IDENTIFICATIVO) → ☐☐☐☐☐☐

esercizio	**1.1**	**1.2**	**1.3a**	**1.3b**	**2.1**	**2.2**	**3**	**4.1a**	**4.1b**	**4.2**
punti max	**2**	**3**	**2**	**3**	**3**	**3**	**5**	**3**	**3**	**6**
valutazione										

esercizio	**5.1**	**5.2**	**5.3**	**6.1**	**6.2**	**6.3a**	**6.3b**	**6.3c**	**6.4**
punti max	**2**	**3**	**4**	**2**	**3**	**2**	**4**	**5**	**10**
valutazione									
TOTALE →						*"bonus" →*		*"malus" →*	

AVVERTENZE : *Svolgere gli esercizi in modo conciso, ma esauriente, nello spazio assegnato in questo fascicolo.* **Non consegnare altri fogli.**
Lo svolgimento preliminare ed i calcoli possono essere effettuati nei fogli bianchi che vengono consegnati agli studenti assieme a questo fascicolo. Tali fogli non devono essere riconsegnati.
– Fino a **due punti ulteriori (bonus)** *potranno essere assegnati agli elaborati scritti in modo molto chiaro.*
– Fino a **due punti (malus)** *potranno essere* **detratti** *dagli elaborati scritti in modo molto confuso o difficilmente leggibile.*

LEGGERE LE AVVERTENZE

NON SFOGLIARE IL TESTO
PRIMA CHE VENGA DATO UFFICIAMENTE
INIZIO ALLA PROVA DAL DOCENTE

ESERCIZIO 1.

(1) Determinare per quali valori del parametro λ, con $1 \leq \lambda \leq 14$ il seguente sistema di congruenze è risolubile:

$$\begin{cases} 5X \equiv \lambda \pmod{15} \\ 4X \equiv 8 \pmod{13} \\ 15X \equiv 13 \pmod{17} \end{cases} .$$

(2) Per ciascun valore intero positivo di λ (con $1 \leq \lambda \leq 14$) per il quale il sistema precedente è risolubile, determinare esplicitamente tutte le sue soluzioni.

(3) Sia $f : \mathbb{Z} \to (\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/17\mathbb{Z})$ l'applicazione definita ponendo

$$f(x) := ([x]_{15}, [x]_{13}, , [x]_{17}), \text{ al variare di } x \in \mathbb{Z}\,.$$

- **(a)** Stabilire se $f : \mathbb{Z} \to (\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/17\mathbb{Z})$ è un omomorfismo dall'anello $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ all'anello prodotto diretto $((\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}), +, \cdot)$ (quest'ultimo con le operazioni di somma e prodotto definite "componente per componente").
- **(b)** Determinare $\mathrm{Im}(f)$ e, se f è un omomorfismo, $\mathrm{Ker}(f)$.

ESERCIZIO 2. Sia $A := (\mathbb{Z}, +, \cdot)$ l'anello degli interi, sia $B := (\mathbb{Z}/\equiv_{10}, +, \cdot)$ l'anello delle classi resto $\pmod{10}$ e sia $\varphi : A \to B$ l'omomorfismo canonico (definito da $\varphi(x) := [x]_{10}$, per ogni $x \in \mathbb{Z}$).

(1) Dimostrare che se J è un ideale di B allora $\varphi^{-1}(J)$ è un ideale di A.

(2) Stabilire se l'insieme $H := \{[0]_{10}, [5]_{10}\}$ forma un ideale di B. Determinare esplicitamente gli elementi di A che appartengono a $\varphi^{-1}(H)$ e stabilire se $\varphi^{-1}(H)$ forma un ideale di A.

ESERCIZIO 3. Utilizzando il Principio di Induzione, provare che, per ogni $n \geq 2$, la seguente espressione:

$$2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + \ldots + 2 \cdot (n-1) + 2 \cdot n + +2 \cdot (n+1)$$

è uguale ad una soltanto tra le seguenti:

(a) $3n$;
(b) $2 \cdot (n+1) + 1$;
(c) $(n+1)(n+2) - 6$;
(d) $n(n+1)$.

ESERCIZIO 4.

(1) Siano dati i seguenti due polinomi $f(T) := T^2 + 4T + 3$ e $g(T) := T^3 + 4T^2 + T - 6$ in $\mathbb{Q}[T]$.

Utilizzando l'algoritmo euclideo delle divisioni successive in $\mathbb{Q}[T]$:

(a) determinare il polinomio *monico* $d(T) := \mathrm{MCD}(f(T), g(T)) \in \mathbb{Q}[T]$;

(b) determinare un'espressione del tipo $d(T) = a(T)f(T) + b(T)g(T)$ (cioè determinare due polinomi $a(T), b(T) \in \mathbb{Q}[T]$) [identità di Bézout in $\mathbb{Q}[T]$].

(2) Si consideri il polinomio

$$h(T) := T^5 + 2T^3 - 2T^2 + 4T + 4 \in \mathbb{Z}[T].$$

Sapendo che $h(1 + \boldsymbol{i}) = 0$ (cioè, che il numero complesso $1 + \boldsymbol{i}$ è una radice del polinomio $h(T)$ nel campo $\mathbb{C}$), si determinino tutti i fattori irriducibili di $h(T)$ in $\mathbb{Z}[T]$ e in $\mathbb{Q}[T]$.

ESERCIZIO 5. Si consideri il gruppo moltiplicativo $G := \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ (matrici 2×2 con determinante non nullo ad entrate nel campo dei numeri complessi) e si considerino i suoi elementi

$$A := \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{i} & 0 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Si calcoli l'ordine di ciascuno dei due elementi A e B.

(2) Si stabilisca se il sottogruppo $H :=< A >$ di G è normale in G.

(3) Sia L il gruppo (sottogruppo di G) costituito da tutti i prodotti di potenze (anche negative) di A e di B. Dopo aver spiegato perché $H \subseteq L$, si stabilisca se H è un sottogruppo normale in L.

[Suggerimento: potrebbe essere utile calcolare AB, BA, ...]

ESERCIZIO 6. Si risponda, con un argomento chiaro e conciso, a ciascuna delle seguenti questioni.

(1) Sia G un gruppo moltiplicativo con 2012 elementi, 1 il suo elemento neutro e $g \in G$ tale che $g^h \neq 1$, per ogni $1 \leq h \leq 2000$. Si può concludere che G è ciclico?

(2) Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo

$$f(x) := \begin{cases} x+1 & \text{se } x < 3 \\ x^2 - 6x + 10 & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

Si determinino esplicitamente gli insiemi $f(\mathbb{R})$, ed $[0]_{\kappa_f}$, essendo κ_f la relazione di equivalenza associata alla funzione f (cioè, se $x, y \in \mathbb{R}$, allora $x \kappa_f y \ :\Leftrightarrow f(x) = f(y)$).

(3) Si consideri l'insieme $P := \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, munito della relazione $\preceq$ definita ponendo

$$(a, b) \preceq (\alpha, \beta) \ :\Longleftrightarrow \ (a < \alpha) \text{ oppure } (a = \alpha \text{ e } b \leq \beta)\,.$$

(a) Si verifichi che $\preceq$ è un ordine totale sull'insieme P.

(b) Se esistono, se determinino *massimo, maggioranti* e *estremo superiore* del seguente sottoinsieme $Q := \{(2012, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ di P.

(c) Si determini, se esiste, *il minimo* dell'insieme

$$Q' := \{(7x + 29y, x + y) \mid x, y \in \mathbb{N},\ 7x + 29y \geq 203\}\,.$$

(4) Si enunci e si dimostri il Teorema di Lagrange sui gruppi.