AL110 - Algebra 1 - A.A. 2011/2012
Prova d'Esame: APPELLO X - Settembre 2012

Cognome: .... **Nome:** ....

Matricola (O ALTRO IDENTIFICATIVO) → | | | | | | |

esercizio	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	2.1	2.2a	2.2b	2.2c	2.2d	3.1	3.2
punti max	3	2	4	1	1	4	4	3	3	4	4	2
valutazione												

esercizio	4.1	4.2	5.1a	5.1b	5.1c	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6	6.1	6.2	6.3	6.4
punti max	3	3	2	2	5	8	2	8	5	4	3	3	3	3
valutazione														
TOTALE →						*"bonus"* →					*"malus"* →			

AVVERTENZE : *Svolgere gli esercizi in modo conciso, ma esauriente, nello spazio assegnato in questo fascicolo.* **Non consegnare altri fogli.**
Lo svolgimento preliminare ed i calcoli possono essere effettuati nei fogli bianchi che vengono consegnati agli studenti assieme a questo fascicolo. Tali fogli non devono essere riconsegnati.
– *Fino a* **due punti ulteriori (bonus)** *potranno essere assegnati agli elaborati scritti in modo molto chiaro.*
– *Fino a* **due punti (malus)** *potranno essere* **detratti** *dagli elaborati scritti in modo molto confuso o difficilmente leggibile.*

LEGGERE LE AVVERTENZE

NON SFOGLIARE IL TESTO
PRIMA CHE VENGA DATO UFFICIAMENTE INIZIO ALLA PROVA DAL DOCENTE

ESERCIZIO 1. (1) Sia dato un intero positivo

$$a := a_m 10^m + a_{m-1} 10^{m-1} + \ldots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$$

scritto in forma decimale (con $0 \leq a_i \leq 9$). Dimostrare che:

$$3 \mid a \quad \Leftrightarrow \quad 3 \mid (a_m + a_{m-1} + \ldots + a_2 + a_1 + a_0)\,.$$

(2) Determinare il resto r, con $0 \leq r \leq 2$, della divisione di 11111111 per 3 spiegando il metodo seguito.

(3) Sia $\mathbf{2} := \{0, 1\}$ l'insieme composto da due elementi e sia A un qualunque insieme. Dimostrare che l'insieme:

$$\mathbf{2}^A := \{f : A \to \mathbf{2} \mid f \text{ è un'applicazione tra insiemi}\}$$

e l'insieme delle parti dell'insieme A:

$$\boldsymbol{P}(A) := \{B \mid B \subseteq A\}$$

sono in corrispondenza biunivoca, descrivendo esplicitamente un'applicazione biunivoca tra i due insiemi.

(4) Elencare tutti gli elementi dell'insieme $\boldsymbol{P}(A)$ nel caso in cui $A := \{a, b, c\}$.

(5) Elencare tutti gli elementi dell'insieme $\mathbf{2}^A$ nel caso in cui $A := \{a, b, c\}$.

ESERCIZIO 2. Sia T un'indeterminata su $\mathbb{Q}$.

(1) Per ciascuno dei seguenti quattro insiemi

$$S_1 := \{f(T) \in A := \mathbb{Q}[T] \mid f(0) \in \mathbb{N}\} \qquad S_2 := \{f(T) \in A := \mathbb{Q}[T] \mid f(0) \in \mathbb{Z}\}$$
$$S_3 := \{f(T) \in A := \mathbb{Q}[T] \mid f(0) \in 2\mathbb{Z}\} \qquad S_4 := \{f(T) \in A := \mathbb{Z}[T] \mid f(0) \in 2\mathbb{Z}\}$$

si dica se è un sottoanello e/o un ideale dell'anello A, motivando adeguatamente la risposta.

(2) Sia adesso $I := \{f(T) \in \mathbb{Q}[T] \mid f(\boldsymbol{i}\sqrt{3}) = 0\}$.

(a) Dopo aver verificato che I è un ideale di $\mathbb{Q}[T]$, si dimostri, usando opportunamente il Teorema di Divisione con Resto, l'uguaglianza insiemistica

$$I = \{g(T)(T^2+3) \mid g(T) \in \mathbb{Q}[T]\}\,.$$

(b) In $\mathbb{Q}[T]$, si trovi $\mathrm{MCD}(T^2+3, T^3+5)$, esibendo una relativa identità di Bézout.

(c) Si trovi, se esiste, l'inversa della classe di T^3+5 modulo I nell'anello-quoziente $\mathbb{Q}[T]/I$(cioè, si determini -se esiste- un polinomio $\ell(T) \in \mathbb{Q}[T]$, in modo tale che $((T^3+5)+I)(\ell(T)+I) = 1+I$).

(d) Si consideri il polinomio

$$f(T) := 2T^5 + 14T^3 + 4T^2 + 24T + 12 \in \mathbb{Q}[T]$$

Dando per buono che $f(T) \in I$, si determinino i fattori irriducibili di $f(T)$ in $\mathbb{Z}[T]$ e in $\mathbb{Q}[T]$.

ESERCIZIO 3. Si considerino i seguenti gruppi ciclici

$$G_1 := (\{\sigma \in \boldsymbol{S}_5 \mid \sigma = (\ (1\ \ 2\ \ 3)^2 \circ (4\ \ 5)\ )^h,\ \text{per qualche } h \in \mathbb{Z}\},\ \circ)$$

$$G_2 := (\mathbb{Z}/17\mathbb{Z},\ +) \qquad G_3 := ((\mathbb{Z}/17\mathbb{Z})^\star,\ \cdot) \qquad G_4 := (\{\zeta \in \mathbb{C} \mid \zeta^9 = 1\},\ \cdot)$$

(1) Per ogni $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, si determinino tutti i generatori di G_i.

(2) Si descrivano esplicitamente tutti gli eventuali omomorfismi di gruppo

$$\varphi : G_2 \to G_4\,.$$

ESERCIZIO 4.

(1) Determinare per quali valori del parametro λ, con $1 \leq \lambda \leq 20$ il seguente sistema di congruenze è risolubile:

$$\begin{cases} 8X \equiv 1 \pmod{11} \\ 5X \equiv 12 \pmod{19} \\ 7X \equiv \lambda \pmod{21} \end{cases} .$$

(2) Per ciascun valore intero positivo di λ (con $1 \leq \lambda \leq 20$) per il quale il sistema precedente è risolubile, determinare esplicitamente tutte le sue soluzioni.

ESERCIZIO 5. Il candidato risolva le seguenti questioni, esibendo un argomento chiaro e conciso.

(1) Sia $\tau : \mathbb{Z}/100\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/25\mathbb{Z}$ l'applicazione definita ponendo:

$$\tau([n]_{100}) := ([n]_4, [n]_{25}) .$$

- **(a)** Si spieghi perché τ è un ben definito isomorfismo di anelli.
- **(b)** Si determini $\tau^{-1}(([1]_4, [12^{12}]_{25}))$. [Si suggerisce di utilizzare l'uguaglianza $12^{12} = \big((12)^3\big)^4$.]
- **(c)** Si determinino le ultime due cifre di 137^{852}, calcolando preliminarmente $137^{852} \pmod 4$ e $137^{852} \pmod{25}$.

(2) Sia $\varphi : \mathbb{N}^\star \to \mathbb{N}$ l'indicatore di Eulero. Si dimostri che, se r, s sono numeri interi positivi relativamente primi, allora $\varphi(rs) = \varphi(r)\varphi(s)$.

(3) Calcolare il valore di $\varphi(30)$.

(4) Sia $n \geq 3$. Si dimostri che la somma degli angoli interni di un poligono convesso avente n lati è uguale a $n - 2$ angoli piatti. [Si può assumere, senza dimostrazione, che la somma degli angoli interni di un triangolo è uguale ad un angolo piatto.]

(5) Si ponga $a_0 := a_1 := 0$ e $a_n := 2a_{n-1} - a_{n-2} + 2$, per ogni $n \geq 2$. Si dimostri che $a_n = n^2 - n$, per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(6) Sull'insieme $\mathbb{N}$ si diano esempi espliciti di due relazioni binarie $\leq_1$, $\leq_2$ tali che:
- **(a)** $\leq_1$ è riflessiva, antisimmetrica ma NON transitiva.
- **(b)** $\leq_2$ è riflessiva, transitiva ma NON antisimmetrica.

ESERCIZIO 6.

(1) Dare la definizione di sottogruppo normale di un gruppo.

(2) Dare un esempio esplicito di un sottogruppo normale proprio in un gruppo non abeliano.

(3) Sia $f : (G, \cdot) \to (G', \cdot)$ un omomorfismo di gruppi. Enunciare per f il Teorema Fondamentale di Omomorfismo.

(4) Stabilire se $g : \mathbb{Q} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, definita ponendo $g((x, y)) := [y]_5$, al variare di $(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$, è un omomorfismo dal gruppo $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}, +)$ (con l'operazione di somma definita "componente per componente") al gruppo $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, +)$. In caso positivo, applicare il Teorema Fondamentale dell'Omomorfismo a g, descrivendone le conseguenze.