

# Tutorato 3 di Algebra 1 (AL110)

a cura di Andrea Cattaneo e Simone Mastrodonato

Università degli studi Roma Tre, Corso di Laurea in Matematica  
Anno Accademico 2011/2012

## Esercizio 1.

Sia  $X$  un insieme non vuoto e  $Y = \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ . Si consideri su  $Y \times Y$  la seguente relazione:

$$(A, B) \leq (C, D) :\Leftrightarrow A \subsetneq C \text{ oppure } A = C \text{ e } B \subseteq D$$

- (i) Si verifichi che la relazione  $\leq$  è un ordine.
- (ii) Si stabilisca se  $\leq$  è una relazione d'ordine totale.
- (iii) Si determinino gli eventuali elementi massimali, minimali, massimo e minimo di  $(Y \times Y, \leq)$ .

## Esercizio 2.

Dato l'insieme  $X = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 5\}$ , si consideri sul prodotto cartesiano  $X \times X$  la seguente relazione:

$$(a, b)\delta(c, d) :\Leftrightarrow a|c \text{ in } \mathbb{N} \text{ e } b \leq d$$

- (i) Si verifichi che  $\delta$  è una relazione d'ordine.
- (ii) Si dica se  $\delta$  è una relazione d'ordine totale.
- (iii) Si stabilisca se l'insieme ordinato  $(X \times X, \delta)$  ammette massimo e/o minimo.
- (iv) Si trovino, se esistono, elementi massimali e minimali.

## Esercizio 3.

Trovare il più piccolo intero  $n \geq 3$  in modo che:  
 $2|n$  ,  $3|n + 1$  ,  $4|n + 2$  ,  $5|n + 3$  ,  $6|n + 4$ .

**Esercizio 4.**

Si consideri l'equazione diofantea:

$$4(\lambda - 5)X + 125Y = 60 \quad (\lambda \in \mathbb{Z})$$

a) Determinare per quali  $\lambda \in \mathbb{Z}$  l'equazione è risolubile.

b) Determinare esplicitamente le soluzioni per  $\lambda = 31$ .

**Esercizio 5.**

Sia  $X$  un insieme non vuoto e  $\Psi$  una collezione non vuota di relazioni di equivalenza su  $X$ .

Verificare che  $\bigcap \Psi$  e' ancora una relazione di equivalenza su  $X$ .

Sia ora  $Y$  un sottoinsieme di  $X \times X$ . Descrivere la più piccola relazione di equivalenza su  $X$  contenente  $Y$ , che è anche detta la *relazione di equivalenza generata da  $Y$* .

Posto

$$X := \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 10\}, \quad Y := \{(1, 2), (1, 3), (3, 4), (3, 2)\} \subseteq X \times X$$

si determini esplicitamente la relazione di equivalenza su  $X$  generata da  $Y$ .

**Esercizio 6.**

Si provi che dato un insieme  $A$  *totalmente ordinato* e  $a \in A$ , allora  $a$  è il massimo di  $A$  se e solo se  $a$  è un elemento massimale di  $A$ . Il precedente enunciato rimane vero se  $A$  non è totalmente ordinato?

**Esercizio 7.**

Sia  $z \in \mathbb{C}$ . Trovare parte reale e parte immaginaria dei seguenti numeri complessi:

$$(i) \quad \frac{1}{z} \qquad (i+z)(i-z)$$

$$(ii) \quad \frac{z+4}{z} \qquad \frac{3\bar{z}-i}{2z+i}$$

$$(iii) \quad \frac{z^3}{z-3} \qquad \frac{z^2}{\bar{z}^2}$$

**Esercizio 8.**

Trovare TUTTE le soluzioni nei complessi delle seguenti equazioni:

$$z^6 - 1 = 0;$$

$$z^5 - 1 = 0.$$