Tutorato Speciale di Algebra 1 (AL110)

a cura di Andrea Cattaneo e Simone Mastrodonato

Università degli studi Roma Tre, Corso di Laurea in Matematica
Anno Accademico 2011/2012

Esercizio 1.

Sia $A = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f \text{ isomorfismo di anelli}\}$ con le operazioni definite puntualmente: $(f+g)(a) = f(a) + g(a); (fg)(a) = f(a)g(a), \forall a \in \mathbb{R}$.

(a) Si dica se A è un sottoanello di $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Esercizio 2.

Si discuta al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{Z}$ le seguenti:

$$\begin{cases} 7\lambda & \equiv 8X \ (mod\ 3) \\ 18X & \equiv 6\lambda \ (mod\ 15) \end{cases}$$

$$7\lambda X + 5Y = 12.$$

Esercizio 3.

Sia $\sigma \in S_8$ la permutazione $\sigma = (1248)(5786)(7654321)$.

(a) Si scriva σ in prodotto di cicli disgiunti e in prodotto di trasposizioni.

(b) Si calcoli σ^{-1}, $o(\sigma)$, $\text{sgn}(\sigma)$ e $\text{supp}(\sigma)$.

Esercizio 4.

Sia G un gruppo con un numero finito di elementi e $g \in G$. Sia $A := \{g, g^2, ..., g^k, ... | k \in \mathbb{N}\}$. Si dimostri che A è un gruppo con un numero finito di elementi.
Nota: Si osserva facilmente che A è il più piccolo sottogruppo di G che contiene l'elemento g. Convenzionalmente si indica $A =< g >$ e si chiama *sottogruppo generato da g*.

Esercizio 5.

Sia $B := \{\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{a} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix} |a \in \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}\}$.

I) Si dimostri che B con l'usuale prodotto tra matrici è un gruppo esibendo l'elemento neutro e la cardinalità.

II) Si calcoli $\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{8} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix}^2$.

III) Si dia una formula per il calcolo della potenza n-esima di un generico elemento del gruppo e la si dimostri.

IV) Si dica se B è un gruppo ciclico esibendo un generatore.

Esercizio 6.

Si considerino i seguenti polinomi:

$$P(T) = T^7 + T^6 + T^5 + T + 1 \qquad Q(T) = T^7 + 1$$

.

(I) Si trovi MCD in $F_2[T]$, $F_5[T]$, $\mathbb{Q}[T]$ e $\mathbb{R}[T]$.

(II) Si fattorizzi $P(T)$ in $F_2[T]$.

Esercizio 7.

Sia $C := \{\sigma \in S_5 | supp(\sigma) \subseteq \{1, 3, 5\}\}$.
Si dimostri che C è un sottogruppo di S_5.

Dopo aver scritto le definizioni di *anello quozientato un ideale* e di *ideale generato da un elemento* si proceda con il seguente esercizio:

Esercizio 8.

Nell'anello $D := \dfrac{\mathbb{R}[T]}{< T^3 + T^2 + T + 1 >}$ si esibiscano *zerodivisori.*
Si calcoli il rappresentante di grado minimo di $[T^4 + 1]$.