Tutorato 10 di Algebra 1 (AL110)

a cura di Andrea Cattaneo e Simone Mastrodonato

Università degli studi Roma Tre, Corso di Laurea in Matematica
Anno Accademico 2011/2012

Esercizio 1.

Si consideri il seguente sottoinsieme di S_6:

$$V := \{(1), (12), (34), (56), (12)(34), (34)(56), (12)(56), (12)(34)(56)\}$$

.

(I) Si mostri che $(V, \circ)$ verifica la definizione di gruppo.

(II) Si mostri che V è abeliano.

(III) Si esibisca un insieme di generatori per V con il minimo numero di elementi.

(IV) Si trovino, se esistono, un intero positivo n e gruppi ciclici $G_1, \ldots, G_n$ tali che il gruppo $G_1 \times \cdots \times G_n$ (con l'operazione definita componente per componente a partire dalle operazioni dei gruppi $G_1, \ldots, G_n$) sia isomorfo a V.

Esercizio 2.

Per ogni intero positivo n, sia A_n il sottogruppo di S_n costituito dalle permutazioni pari.

(I) Si dica se A_4 è abeliano o meno.

(II) Si dica se A_4 è normale in S_4.

Siano ora $G := S_4/A_4$ e $X := \{-1, 1\}$.

(a) Si descriva G come insieme e si calcoli il numero degli elementi.

(b) Si dica se G è isomorfo a un sottogruppo di $\mathbb{Z}$.

(c) Si esibisca, se esiste, un isomorfismo fra G e $(X, \cdot)$.

Esercizio 3.

Sia $\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \in \mathbb{C}$ e l'insieme $P = \{\zeta^i \mid i \in \mathbb{N}\}$

(I) Si dimostri che P è un insieme finito.

(II) Si dimostri che P è un sottogruppo di $(\mathbb{C}^{\star}, \cdot)$.

Esercizio 4.

Si dica quali assiomi di gruppo soddisfano le seguenti coppie di insieme-composizione:

(I) $G = \{1, 2, 3...\}, a \circ b = a^b$;

(II) $G = \mathbb{R}, a \circ b = a + b + 3$;

(III) $G = \mathbb{R}_{>1}, a \circ b = a^{\log(b)}$;

(IV) $G = \{1, 2, 3...\}, a \circ b = max(a, b)$;

(V) $G = \{-1, 0, 1\}, a \circ b = a + b$;

Esercizio 5. *Gruppo di Heisenberg.*

Si consideri $\mathfrak{H} := \{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} |a, b, c \in \mathbb{Z}\}$.

(I) Si mostri che è un gruppo rispetto all'usuale prodotto di matrici.

(II) Si descriva $Z := \{z \in \mathfrak{H} | z \cdot x = x \cdot z \ \forall x \in \mathfrak{H}\}$.

(III) Si dica se Z è abeliano.

Esercizio 6.

Sia $G = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Definiamo una legge di composizione su G in tale maniera:

$$(a, b, c) \cdot (l, m, n) = (a + l + cm, b + m, c + n)$$

.

1. Si trovi l'elemento neutro per tale legge di composizione.
2. Si verifichi che $(G, \cdot)$ è un gruppo.
3. Si dica se G è abeliano.

Esercizio 7.

Si consideri l'anello $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$ le cui operazioni di somma e prodotto sono definite componente per componente a partire da quelle di $\mathbb{Z}$ e di $\mathbb{Q}$:

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d) \qquad (a, b) \cdot (c, d) := (ac, bd) \qquad \text{per ogni } (a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}.$$

Si dica se:

(a) A è commutativo con unità (moltiplicativa)

(b) A è un dominio di integrità;

(c) A è un campo.

Si descriva il gruppo degli elementi invertibili di A.

Esercizio 8.

Si consideri l'applicazione $\phi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ t.c. $\phi(a) = ([a]_3, [a]_7)$. Si mostri che ϕ è un omomorfismo sugettivo di anelli, si determini $Ker(\phi)$, e si deduca che $\mathbb{Z}/21\mathbb{Z}$ è isomorfo (come anello) a $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. Inoltre si stabilisca se $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/14\mathbb{Z}$ sono anelli unitari, domini di integrità o campi.