Tutorato 2 di Algebra 110

a cura di Andrea Cattaneo e Simone Mastrodonato

Universita' degli studi RomaTRE, Corso di Laurea in Matematica
Anno Accademico 2011/2012

Esercizio 1.

Si dimostri sui naturali che:

$$2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 14 \cdot ... \cdot (4n-2) = \tfrac{(2n)!}{n!};$$

$$1 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \tfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Esercizio 2.

Sia $r \in \mathbb{R}$ che verifica $r + \frac{1}{r} \in \mathbb{Z}$. Per induzione su $n \in \mathbb{N}$ provare che:

$$r^n + \frac{1}{r^n} \in \mathbb{Z}.$$

Esercizio 3.

Usando l'algoritmo delle divisioni successive calcolare $MCD(2424, 772)$ scrivendo anche una *identità di Bézout.*

Esercizio 4.

Utilizzando il principio di induzione si discuta la veridicità o la falsità per ogni $n \in \mathbb{N}$ di:

$$7|2^{3n} - 1;$$

$$3|2^n + (-1)^{n+1};$$

$$3|n(n+1).$$

Esercizio 5.

Siano a, b numeri interi non entrambi nulli. Provare che:

(i) $MCD(a, b) = 1$ se e solo se $MCD(a + b, ab) = 1$.

(ii) Se $MCD(a, b) = 1$ allora $\forall n \in \mathbb{N}$ naturale

$$MCD(a^n, b) = MCD(a, b^n) = MCD(a^n, b^n) = 1.$$

(iii) Dimostrare che $MDC(a, a + 1) = 1$ e che $MCD(2a + 1, 9a + 4) = 1$.

Esercizio 6.

Dimostrare che ogni numero primo $p \geq 5$ è della forma $6k + 1$ oppure $6k - 1$.