# Tutorato 5 di Algebra 110

**a cura di Andrea Cattaneo e Simone Mastrodonato**

Universita' degli studi RomaTRE, Corso di Laurea in Matematica
Anno Accademico 2011/2012

**Esercizio 1.**

Si dimostri per induzione che:

$$\forall\ n > 1 : \quad \tfrac{1}{\sqrt{1}} + \tfrac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \tfrac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n};$$

$$\forall\ n \geq 1 : \tbinom{n}{0} - \tbinom{n}{1} + \tbinom{n}{2} + \cdots + (-1)^n \tbinom{n}{n} = 0.$$

**Esercizio 2.**

Sia $S = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}$. Si consideri la relazione $\leq$ definita su $S$ nel seguente modo:

$$X \leq Y \quad \Longleftrightarrow \quad X = Y \text{ oppure } x \leq y \quad \forall\ x \in X \text{ e } y \in Y.$$

1. Stabilire se $\leq$ è d'ordine.
2. Stabilire se $\leq$ è d'ordine totale.
3. Trovare gli eventuali elementi massimali, minimali, massimi e minimi di $S$ rispetto a $\leq$.

**Esercizio 3.**

Sia dato il sottinsieme di $\mathbb{N}$

$$S = \left\{ 2^a 5^b 11^c \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{N} \right\}.$$

Si consideri la relazione $\rho$ d'equivalenza su $S$ definita nel seguente modo:

$$(2^a 5^b 11^c)\, \rho\, (2^d 5^e 11^f) \Longleftrightarrow a + b + c = d + e + f.$$

Determinare $[1]_\rho\,, [4]_\rho\,, [5]_\rho\,, [10]_\rho\,, [110]_\rho\,, [111]_\rho\,.$

**Esercizio 4.**

Si dia per buono che ogni $n \in \mathbb{N}_+$ è univocamente scritto nella forma $2^\alpha(2s+1)$, con $\alpha, s \in \mathbb{N}$. Si consideri la seguente relazione binaria $\rho$ su $\mathbb{N}_+$: presi $n = 2^\alpha(2s+1)$ e $m = 2^\beta(2t+1)$ diremo che

$$n \,\rho\, m \Longleftrightarrow (n = m) \quad \text{oppure} \quad (\alpha < \beta \;\text{ oppure }\; \alpha = \beta \text{ ed } s < t).$$

1. Stabilire se $\rho$ è d'ordine.
2. Stabilire se $\rho$ è d'ordine totale.
3. Dire se $5\,\rho\,22,\; 4\,\rho\,9,\; 16\,\rho\,20,\; 10\,\rho\,15.$
4. Trovare gli eventuali elementi massimali, minimali, massimi e minimi di $\mathbb{N}_+$ rispetto a $\rho$.

**Esercizio 5.**

Siano a, b numeri interi non entrambi nulli e sia $MCD(a, b) = d$.

(i) Provare che esistono più identità di Bèzout per $d$.

(ii) Provare che $ax + by = au + bv = 1$, per qualche $x, y, u, v \in \mathbb{Z}$ se e solo se esiste $n \in \mathbb{Z}$ tale che $x = u + nb$ e $y = v - na$.

(iii) Provare che $ax + by = au + bv = d$, per qualche $x, y, u, v \in \mathbb{Z}$ se e solo se esiste $n \in \mathbb{Z}$ tale che $x = u + n\frac{\mathrm{mcm}(a,b)}{a}$ e $y = v - n\frac{\mathrm{mcm}(a,b)}{b}$.

**Esercizio 6.**

Utilizzando $\neg(\neg P) \Leftrightarrow P$, semplificare la seguente proposizione:

> Non ha torto chi afferma che non è vero che non sia credibile
> che Homer ignori in quale stato sia Spingfield.

**Esercizio 7.**

Dire per quali $\lambda \in \mathbb{Z}$ l'equazione diofantea $(2\lambda + 4)X + 5Y = 16$ ha soluzioni. Determinare inoltre tutte le soluzioni della stessa per il più piccolo valore positivo di $\lambda$ per cui esistono soluzioni.

**Esercizio 8.**

1. Provare che 3 è l'unico primo $p$ tale che anche $p^2 + 2$ è primo.
2. Provare che se $p > 3$ è un numero primo tale che $p + 2$ è primo, allora $12|(2p + 2)$.
3. Provare che l'unico numero primo positivo della forma $n^3 - 1$ è 7.