

# Tutorato 7 di Algebra 1 (AL110)

a cura di Andrea Cattaneo e Simone Mastrodonato

Università degli studi Roma Tre, Corso di Laurea in Matematica  
Anno Accademico 2011/2012

## Esercizio 1.

Siano  $X$  un insieme con  $n$  elementi,  $Y \subseteq \mathcal{P}(X)$  e  $\psi$  definita nel seguente modo:

$$\begin{aligned}\psi : Y &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ \psi(A) &= |A| - 3\end{aligned}$$

Si discuta al variare di  $n \in \mathbb{N}$  l'esistenza di un  $Y$  per cui la corrispondenza sia:

- (I) una applicazione;
- (II) una applicazione iniettiva.

E' possibile determinare  $Y$  in modo che la corrispondenza sia invertibile?

## Esercizio 2.

Data la corrispondenza  $\gamma : \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^* \longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$

$$\gamma(a, b) = (|a + b|, \frac{8}{ab})$$

Si determini il sottoinsieme piu' grande del dominio in modo che la corrispondenza sia una applicazione.

- (I) Si restringa opportunamente il dominio di  $\gamma$  affinche'  $Im(\gamma) \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ .  
La nuova applicazione ottenuta è suriettiva o iniettiva?
- (II) Si determinino gli insiemi  $\gamma^{-1}(3, 4)$  e  $\gamma^{-1}(6, -1)$ .

**Esercizio 3.**

*I misteri dell'algebra*

Si sa che le ultime tre apparizioni della **Cometa di Halley** sono avvenute negli anni 1835, 1910, 1986 e la prossima avverrà nel 2061.

Si dimostri che:

$$1835^{1910} + 1986^{2061} \equiv 0 \pmod{7}.$$

**Esercizio 4.**

Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  l'applicazione definita da:

$$x \mapsto \begin{cases} x^3, & \text{se } |x| \leq 5, \\ [x], & \text{se } |x| > 6. \end{cases}$$

- (I) Si stabilisca se l'applicazione è iniettiva;
- (II) Si descriva  $Im(f)$ ;
- (III) Definendo  $\rho := \rho_f$  la relazione nucleo di  $f$  si calcoli  $[3]_\rho$  e  $[\frac{1}{3}]_\rho$ .

**Esercizio 5.**

Sia  $X \neq \emptyset$  e  $Y := X^X = \{f : X \rightarrow X \mid f \text{ è una funzione}\}$ . Sia  $\prec$  la relazione definita come:

$$f \prec g \iff f = g \text{ oppure } Im(f) \subsetneq Im(g)$$

- (I) Si dimostri che è d'ordine.
- (II) Si trovino elementi massimali e minimali di  $(Y, \prec)$ .

**Esercizio 6.**

Siano  $f$  e  $g$  due applicazioni. Chiamiamo  $g \circ f$  la loro composizione.

Supponendo che  $g \circ f$  sia biettiva cosa possiamo dire di  $f$  e  $g$ ? E se  $g \circ f$  è iniettiva? Se  $g \circ f$  è surgettiva?