Tutorato 8 di Algebra 1 (AL110)

a cura di Andrea Cattaneo e Simone Mastrodonato

Università degli studi Roma Tre, Corso di Laurea in Matematica
Anno Accademico 2011/2012

Esercizio 1.

Si fissi un numero reale r e sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita ponendo $f(x) := rx$, per ogni $x \in \mathbb{R}$. Si determinino tutti e soli i valori di r per cui f è una bigezione. Per tali valori di r, si esibisca la legge di f^{-1}. Al variare di $r \in \mathbb{R}$, si stabilisca se esiste un intero positivo n tale che $f^n = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

Esercizio 2.

Si consideri il polinomio $f(T) := T^2 + T + 1 \in \mathbb{R}[T]$ e sia $\omega \in \mathbb{C}$ una sua radice. Sia $\phi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ la funzione definita ponendo $\phi(x) := \omega x$, per ogni $x \in \mathbb{C}$. Si dimostri che ϕ è una bigezione, e si determini, se esiste, il minimo intero positivo n tale che $\phi^n = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$. Si dica se $\phi^{-1} = \phi^m$, per qualche intero positivo m.

Esercizio 3.

Data una permutazione $\sigma \in S_n$ $(n \in \mathbb{N}^+)$, si ponga $O_x := \{\sigma^h(x) : h \in \mathbb{N}\}$, per ogni $x \in \{1, \dots, n\}$. Per ognuna delle permutazioni di cui a seguito:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 6 & 5 & 7 & 9 & 1 & 8 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 7 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

(I) si determini il supporto;

(II) si determini O_1;

(III) si scriva l'espressione in prodotto di cicli disgiunti;

(IV) si scriva un'espressione in prodotto di trasposizioni;

(V) si calcoli il segno.

Esercizio 4.

Sia $n \in \mathbb{N}^+$ e S_n l'insieme delle permutazioni di $\{1, \dots, n\}$ e $\circ$ la corrispondenza definita da:

$$\circ : S_n \times S_n \longrightarrow S_n$$

$$(\sigma, \tau) \longmapsto \sigma \circ \tau$$

(I) si dimostri che $\circ$ è una ben definita applicazione;

(II) si discuta al variare di $n \in \mathbb{N}$ se per ogni σ e $\tau \in S_n$ si ha che $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$. Si diano esempi espliciti.

(III) si calcoli nella completa generalità $(1\ 2 \dots n) \circ (1\ n\ \ n-1 \dots\ 3\ 2)$.

Esercizio 5.

Siano ρ e $\psi \in S_9$:

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 & 8 & 9 & 7 \end{pmatrix} \qquad \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(I) si dimostri che $\rho \circ \psi = \psi \circ \rho$;

(II) si trovi la decomposizione in cicli disgiunti di ψ, ρ, $\psi \circ \rho$

(III) si trovino interi positivi k, h, s in modo che $\psi^k = \rho^h = (\psi \circ \rho)^s$

Esercizio 6.

Siano A, B insiemi e $f : A \longrightarrow B$ una funzione. Sia

$$\widehat{f} : \mathcal{P}(A) \longrightarrow \mathcal{P}(B)$$

$$X \longmapsto f(X)$$

Si studi iniettività , surgettività e bigettività di $\widehat{f}$ al variare di f.

Esercizio 7.

Siano $f : A \longrightarrow B$ e $g : A' \longrightarrow B'$ applicazioni, e sia $f \times g : A \times A' \longrightarrow B \times B'$ la funzione definita ponendo

$$(f \times g)((a, a')) := (f(a), g(a'))$$

Si studi iniettività, surgettività, bigettività di $f \times g$, al variare di f e g.