Tutorato 9 di Algebra 1 (AL110)

a cura di Andrea Cattaneo e Simone Mastrodonato

Università degli studi Roma Tre, Corso di Laurea in Matematica
Anno Accademico 2011/2012

Esercizio 1.

Si consideri la seguente serie formale:

$$\alpha := \sum_{i \geqslant 0} a_i T^i \in \frac{\mathbb{Z}}{6\mathbb{Z}}[\![T]\!]$$

dove

$$a_i = \begin{cases} [2]_6, & \text{se } i \text{ è pari,} \\ [4]_6, & \text{se } i \text{ è dispari.} \end{cases}$$

(I) Si discuta l'invertibilità di α in $\frac{\mathbb{Z}}{6\mathbb{Z}}[\![T]\!]$.

(II) È vero che esiste $f \in \frac{\mathbb{Z}}{6\mathbb{Z}}[\![T]\!] \setminus \{\overline{0}\}$ tale che $f \cdot \alpha = \overline{0}$?

(III) È vero che per qualche intero $n \geq 1$ si ha $\alpha^n = \overline{0}$?

Esercizio 2.

Sia $A \in \{\mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$. Si dimostri che:

(I) $f(T) \in A[T]$ non ha radici in A e deg(f)$= 2 \Longrightarrow f(T)$ irriducibile in $A[T]$;

(II) $f(T) \in \mathbb{Q}[T]$ non ha radici in $\mathbb{Q}$ e deg(f)$= 3 \Longrightarrow f(T)$ irriducibile in $\mathbb{Q}[T]$;

(III) $f(T) \in \mathbb{R}[T]$ e $\deg(f) = 2k+1, k \in \mathbb{N} \Longrightarrow f(T)$ ha almeno una radice in $\mathbb{R}$.

Esercizio 3.

Sia $f(T) \in \mathbb{R}[T]$ e sia $\alpha \in \mathbb{C}$ una sua radice. Si dimostri che anche il coniugato di α è radice di $f(T)$.

Esercizio 4.

Sia l'applicazione

$$\begin{aligned} W : \mathbb{Q}[T] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f(T) &\longmapsto W(f) := f(\sqrt{2}) \end{aligned}$$

(I) Si descriva $\Theta = W^{-1}(\{0\})$.

(II) Si provi che la relazione $\mathfrak{R}_\Theta := \{(f,g) \in \mathbb{Q}[X]^2 : f - g \in \Theta\}$ è di equivalenza;

(III) Si descriva la classe $[T^3+2]_{\mathfrak{R}_\Theta}$ e si trovi un rappresentante che abbia grado 1.

Esercizio 5.

Si discuta l'irriducibilità dei seguenti polinomi in $\mathbb{Z}[T]$, $\mathbb{Q}[T]$, $\mathbb{R}[T]$ e $\mathbb{C}[T]$, e si fattorizzino i polinomi riducibili come prodotto di irriducibili:

(I) $T^4 + T^3 + T^2 + T + 1$;

(II) $T^4 + 1$;

(III) $5T^5 - 5T^4 - 5T^3 - 5T^2 - 5T - 10$;

Esercizio 6.

Si considerino i seguenti polinomi:

$$P(T) = T^7 + T^6 + T^5 + T + 1 \qquad Q(T) = T^7 + 1$$

(I) Si trovi $\mathrm{MCD}(P(T), Q(T))$ in $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[T]$, $\mathbb{Q}[T]$.

(II) Si fattorizzi $P(T)$ in $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[T]$.

Esercizio 7.

Sia α un numero reale e F_α la mappa così definita:

$$F_\alpha : \mathbb{R}[T] \longrightarrow \mathbb{R}[T]$$

$$f(T) \longmapsto r(T)$$

dove $r(T)$ è il resto della divisione di $f(T)$ per $T - \alpha$. Si dica se esiste $f \in \mathbb{R}[T] \setminus \{0\}$ tale che $F_\alpha(f) = 0$, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.
Si dica se esiste $f \in \mathbb{R}[T]$ tale che $F_\alpha(f) \neq 0$, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.