AL410 - Algebra Commutativa - A.A. 2012/2013

Valutazione "in itinere" – Prima Prova

AVVERTENZE: *Svolgere il tema, utilizzando al più 2 facciate di un foglio protocollo e scrivendo in modo chiaro e conciso (nel punteggio si terrà conto della leggibilità del testo elaborato).*

TEMA: Anelli di frazioni e localizzazioni.

ESERCIZIO. Siano $A := \mathbb{Z}$ e $B := \mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$ (considerati come anelli commutativi unitari) e sia R l'anello prodotto diretto $A \times B$ (ovvero, l'insieme prodotto cartesiano $A \times B$ dotato di operazioni di somma e prodotto definte componente per componente).

(1) Mostrare che se I è un ideale di A e J è un ideale di B allora $I \times J$ è un ideale di R.

(2) Sia H un ideale dell'anello R. Mostrare che esistono un ideale I di A ed un ideale J di B in modo tale che $H = I \times J$.

(3) Stabilire se R è un anello ad ideali principali, cioè se per ogni ideale H di R esiste un elemento $h \in R$ in modo tale che $H = hR$.

(4) Determinare esplicitamente tutti gli ideali primi e tutti gli ideali massimali di R.

(5) Determinare l'ideale $\texttt{Nilp}(R)$ formato da tutti gli elementi nilpotenti di R e descrivere l'anello ridotto associato ad R.

(6) Determinare l'ideale $\texttt{Jac}(R)$ (ideale radicale di Jacobson di R).

(7) Determinare l'insieme $\texttt{Idemp}(R)$ formato da tutti gli idempotenti dell'anello R.

(8) Determinare l'insieme $\texttt{U}(R)$ di tutti gli elementi invertibili di R.

(9) Sia $p_B : R \to B$ l'omomorfismo suriettivo di proiezione di R sul suo secondo fattore, cioè $p_B((a, b)) := b$, presi comunque $a \in A$ e $b \in B$.
Sia Q l'ideale (principale) generato da $\overline{5}$ in B (dove $\overline{5}$ è la classe di 5 modulo 20).

Mostrare che Q è un ideale primo di B e che $P := p_B^{-1}(Q)$ è un ideale primo di R. Descrivere esplicitamente l'anello locale R_P e stabilire se tale anello locale è oppure non è un dominio o un campo.

(10) Determinare, se esistono, tutti gli ideali primi H in R per i quali la localizzazione R_H è un campo.