AL410 - Algebra Commutativa - A.A. 2012/2013

Valutazione "in itinere" – Seconda Prova

AVVERTENZE: *Svolgere il tema, utilizzando al più 2 facciate di un foglio protocollo e scrivendo in modo chiaro e conciso (nel punteggio si terrà conto della leggibilità del testo elaborato).*

TEMA: Ideali irriducibili e primari. Decomposizione di un ideale come intersezione finita di ideali primari in un anello noetheriano.

ESERCIZIO 1. Dato un anello commutativo unitario A, dimostrare che A è noetheriano se e soltanto se ogni ideale primo di A è finitamente generato.
[Può essere utile considerare l'insieme $\boldsymbol{\mathcal{S}} := \{I \text{ ideale di } A \mid I \text{ non finitamente generato}\}$.]

ESERCIZIO 2. Si consideri l'anello $A := \mathbb{Z}[X,Y]/(X^2+1)$. Mostrare che A è un dominio, è noetheriano ed è integralmente chiuso nel suo campo dei quozienti. Mostrare che in A esistono ideali primi $\neq (0)$ non massimali e dare un esempio di un ideale massimale di A.

ESERCIZIO 3. Si consideri l'anello $A := \mathbb{Z} + X\mathbb{Q}[[X]]$, sottoanello dell'anello $B := \mathbb{Q}[[X]]$ di tutte le serie formali in una indeterminata a coefficienti nel campo $\mathbb{Q}$ (esplicitamente, A è formato dalle serie formali in una indeterminata a coefficienti nel campo $\mathbb{Q}$ e a termine noto in $\mathbb{Z}$).

(1) Mostrare che B è un dominio di valutazione.

(2) Mostrare che B è un dominio ad ideali principali e, precisamente, dato un ideale J di B, $J = X^n\mathbb{Q}[[X]]$, per un qualche $n \geq 0$.

(3) Mostrare che A è un dominio e calcolare esplicitamente il suo campo dei quozienti. Stabilire se A è un anello noetheriano. Stabilire se A è un dominio di valutazione.

(4) Sia p un numero primo. Mostrare che $P := p\cdot\mathbb{Z} + X\mathbb{Q}[[X]]$è un ideale primo di A. Stabilire se P è un ideale massimale di A.

(5) Descrivere esplicitamente gli elementi del dominio locale A_P e stabilire se A_P è un anello di valutazione.

(6) Mostrare che ogni delle I di A è confrontabile con l'ideale primo $Q := X\mathbb{Q}[[X]]$ di A.

(7) Descrivere $\mathrm{Max}(A)$.

(8) Stabilire se A è integralmente chiuso nel suo campo dei quozienti.