AL410 - Algebra Commutativa - A.A. 2013/2014
Valutazione "in itinere" – Prima Prova

AVVERTENZE: *Svolgere il tema, utilizzando al più 2 facciate di un foglio protocollo e scrivendo in modo chiaro e conciso (nel punteggio si terrà conto della leggibilità del testo elaborato).*

TEMA: Parti moltiplicative e parti moltiplicative saturate in anelli commutativi unitari. Ideali ed ideali primi in un anello di frazioni rispetto ad una parte moltiplicativa (saturata).

ESERCIZIO 1. Siano $A := \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ e $B := \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ (considerati come anelli commutativi unitari) e sia R l'anello prodotto diretto $A \times B$ (ovvero, l'insieme prodotto cartesiano $A \times B$ dotato di operazioni di somma e prodotto definite componente per componente). Sia $\varphi : \mathbb{Z} \to R := A \times B$ l'omomorfismo canonico definito da $x \mapsto ([x]_{15}, [x]_4)$.

(1) Descrivere tutti gli ideali primi dell'anello A.

(2) Descrivere tutti gli ideali primi dell'anello B.

(3) Descrivere tutti gli ideali primi dell'anello R.

(4) Determinare il radicale primo ed il radicale di Jacobson dell'anello R.

(5) Stabilire se φ è un omomorfismo suriettivo o/e iniettivo.

(6) Determinare $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

(7) Determinare l'insieme $\varphi^{-1}(([6]_{15}, [1]_4))$.

(8) Stabilire se $I := A \times [2]_4 B$ è un ideale primo dell'anello R e, in caso affermativo, descrivere la localizzazione di R in I.

(9) Determinare tutti gli elementi idempotenti dell'anello A, dell'anello B e dell'anello R.

ESERCIZIO 2. Sia S una parte moltiplicativa saturata di un dominio (cioè, anello commutativo unitario, privo di divisori dello zero) D.
Siano a e b due elementi non nulli di D tali che $\frac{a}{b} \in S^{-1}D$. Dimostrare oppure negare con un controesempio che necessariamente l'elemento b appartiene ad S.