AL410 - Algebra Commutativa - A.A. 2013/2014

Valutazione "in itinere" – Seconda Prova

AVVERTENZE: *Svolgere il tema, utilizzando al più 2 facciate di un foglio protocollo e scrivendo in modo chiaro e conciso (nel punteggio si terrà conto della leggibilità del testo elaborato).*

TEMA: Teorema della base di D. Hilbert e sue conseguenze.

ESERCIZIO 1. Sia $P := 2\mathbb{Z}$, sia $S := \mathbb{Z} \setminus 2\mathbb{Z}$ e sia $\mathbb{Z}_{(2)} := S^{-1}\mathbb{Z}$. Nell'anello di polinomi $\mathbb{Z}_{(2)}[X]$ si consideri l'ideale $H := (2X-1)\mathbb{Z}_{(2)}[X]$.

(1, a) Mostrare che l'applicazione $\varphi : \mathbb{Z}_{(2)}[X] \to \mathbb{Q}$, definita da $\varphi(f(X)) := f(1/2)$, per ogni polinomio $f(X) \in \mathbb{Z}_{(2)}[X]$, è un omomorfismo di anelli. Determinare $\mathrm{Ker}(\varphi)$ ed $\mathrm{Im}(\varphi)$.

(1, b) Stabilire se l'ideale H è un ideale primo o massimale in $\mathbb{Z}_{(2)}[X]$.

ESERCIZIO 2. Si consideri il prodotto tensoriale $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$.

(2, a) Determinare, se esiste, un intero positivo d in modo tale che l'applicazione

$$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/15\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, \quad \text{definita da } [a]_6 \otimes [b]_{15} \mapsto [ab]_d$$

sia un isomorfismo di $\mathbb{Z}$-moduli.

(2, b) In caso di risposta affermativa nel punto precedente, determinare univocamente x, con $0 \leq x \leq d-1$ in modo tale la classe $[x]_d$ corrisponda nell'isomorfismo descritto nel punto precedente all'elemento $[5]_6 \otimes [2]_{15} \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$.

ESERCIZIO 3. (a) Sia $f : A \to B$ un omomorfismo di anelli commutativi.
Sia $\mathcal{Q}$ un ideale $\mathcal{P}$-primario in B. Mostrare che:

(3, a′) $f^{-1}(\mathcal{P})$ è un ideale primo di A, e che

(3, a″) $f^{-1}(\mathcal{Q})$ è un ideale $f^{-1}(\mathcal{P})$-primario in A.

(b) Sia P un ideale primo di un anello A, sia $S := A \setminus P$, sia $A_P := S^{-1}A$ e sia $\varphi : A \to A_P$ l'omomorfismo canonico (definito da $a \mapsto a/1$, per ogni $a \in A$).
Per ogni $n \geq 1$ si consideri l'ideale $P^{(n)} := \varphi^{-1}(P^n A_P)$ di A.

(3, b′) Stabilire se P^n è confrontabile con $P^{(n)}$ (rispetto alla relazione $\subseteq$ tra insiemi) e determinare $\mathrm{rad}(P^{(n)})$, per ogni $n \geq 1$.

(3, b″) Stabilire se $P^{(n)}$ è un ideale primario di A, per ogni $n \geq 1$.