ME410 MEPVS
A.A. 2012/2013

Prof. Marco Fontana

Matematiche Elementari da un Punto di Vista Superiore

1. Teoria della Cardinalità

Introduzione alla teoria della cardinalità. Cardinalità di un insieme. Insiemi di cardinalità finita. Cardinalità del numerabile. Cardinalità del continuo. Un insieme infinito ha sempre un sottoinsieme numerabile. Un sottoinsieme di un insieme numerabile o è finito o è numerabile. Teorema di Cantor sull'unione numerabile di insiemi numerabili: Primo procedimento diagonale di Cantor. Gli insiemi $\mathbf{N}$ e $\mathbf{Q}$ hanno cardinalità del numerabile.

L'insieme $P(X)$ delle parti di un insieme X è in corrispondenza biunivoca con l'insieme $2^X := \{f : X \to 2 \mid f \text{ è una funzione}\}$. Un insieme X ha cardinalità minore od uguale ad un insieme Y se esiste una biiezione tra X ed un sottoinsieme di Y. Un insieme X ha cardinalità minore strettamente a quella di un insieme Y se ha cardinalità minore od uguale e non esiste una biiezione tra X ed Y. La relazione di minore od uguale tra cardinalità è una relazione riflessiva e transitiva.

Teorema di Cantor: Per ogni insieme X, $\mathrm{Card}(P(X))$ è strettamente maggiore di $\mathrm{Card}(X)$. $\mathrm{Card}(\mathbf{R}) = \mathrm{Card}(P(\mathbf{N}))$ è strettamente maggiore di $\mathrm{Card}(\mathbf{N})$ e Secondo Metodo Diagonale di Cantor.

Teorema di Dedekind: un insieme è infinito se e soltanto se può essere messo in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio.

Teorema di Cantor-Schröder-Bernstein: La relazione di minore od uguale tra cardinalità è una relazione antisimmetrica (e quindi è una relazione di ordine).

Ipotesi del Continuo (CH) ed Ipotesi Generalizzata del Continuo (GCH): cenni sui risultati di K. Gödel e P. Cohen sulla consistenza ed indipendenza di (CH) dagli assiomi della teoria degli insiemi (secondo Zermelo-Fraenkel (ZF)) e dall'assioma della scelta.

L'insieme $\mathbf{R} \times \mathbf{N}$ è equipotente ad $\mathbf{R}$.

L'insieme dei numeri algebrici (reali o complessi) forma un insieme numerabile, mentre l'insieme dei numeri trascendenti (reali o complessi) forma un insieme continuo.

Aritmetica dei numeri cardinali: somma e prodotto di due numeri cardinali. Prime proprietà della somma e del prodotto di numeri cardinali.

Si ponga $\aleph_0 :=\mathrm{Card}(\mathbf{N})$, $\aleph_1 := \mathrm{Car}(\mathbf{R})$, allora:

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0 = n + \aleph_0 = n \cdot \aleph_0,$$

$$\aleph_0 + \aleph_1 = \aleph_1 + \aleph_1 = \aleph_1 \cdot \aleph_1 = \aleph_0 \cdot \aleph_1 = \aleph_1 = n + \aleph_1 = n\aleph_1.$$

L'esponenziazione tra numeri cardinali e prime proprietà.

2. Anelli booleani, algebre booleane, spazi topologici booleani, Teorema di Stone

Anelli booleani esempi e prime proprietà. Operazioni $\vee$ e $\wedge$. L'insieme delle parti $P(X)$ di un insieme non vuoto X è un anello booleano rispetto alle operazioni (tra insiemi) di somma simmetrica e intersezione.

Algebre booleane e loro assiomi. Esempi. Caratterizzazione delle algebre booleane (tramite un sottoinsieme dei loro assiomi). Algebra booleana associata ad un anello booleano ed anello booleano associato ad un'algebra booleana. Teorema di equivalenza tra anelli booleani ed algebre booleane. Utilità dell'uso delle due nozioni per trattare -in modo naturale- una varietà di esempi di natura differente.

Cenni biografici su G. Boole.

Algebre booleane e campi d'insiemi. Algebra booleana degli aperti-chiusi di uno spazio topologico non vuoto. L'algebra booleana degli aperti-chiusi di uno spazio topologico non vuoto è un campo d'insiemi.

Algebra booleana degli aperti regolari di uno spazio topologico: caratterizzazioni degli aperti regolari ed operazione $\perp$ (chiusura topologica seguita dalla complementazione). L'algebra booleana degli aperti regolari di uno spazio topologico non è un campo d'insiemi.

Proprietà elementari di un'algebra booleana: unicità dell'elemento neutro rispetto a $\vee$, unicità dell'elemento neutro rispetto a $\wedge$, unicità del elemento complementare a' di un elemento a. Leggi di assorbimento.

Algebre booleane e logica matematica elementare. La somma come duale dell'equivalenza "$\Leftrightarrow$" ed il suo significato logico come "o, disgiuntivo", *aut* latino.

Algebre booleane come insiemi (parzialmente) ordinati. Prime proprietà della relazione di ordine naturale introdotta su una qualunque algebra booleana.

Le nozioni di "sup" ed "inf". Cenni sulla nozione di reticolo. Reticoli completi. Reticoli distributivi ed algebre booleane. Algebre booleane complete. Esempi e controesempi. Leggi di de Morgan estese al caso infinito. Dualità anche nel caso di algebre booleane complete. Leggi distributive estese semplici.

Sottoalgebre booleane: esempi e controesempi. Campo d'insiemi di un dato insieme X non vuoto è una sottoalgebra booleana di $P(X)$. Intersezioni di famiglie di sottoalgebre booleane. Sottoalgebra booleana generata da un sottoinsieme di una data algebra booleana. Omomorfismi tra algebre booleane. Prime proprietà degli omomorfismi tra algebre booleane. Omomorfismi tra algebre booleane ed omomorfismi tra anelli booleani. Esempi di omomorfismi booleani.

Ideali di algebre booleane. Esempi. Congruenze di algebre booleane (equivalenze che rispettano le operazioni di un'algebra booleana). Algebre booleane quoziente rispetto ad una congruenza booleana. Congruenze di un anello booleano: descrizione in termini di ideali. Corrispondenza tra congruenze booleane ed ideali. Classi di equivalenza rispetto a congruenze. Ideali propri.

Filtro booleano: dualità con gli ideali booleani. Corrispondenza biunivoca tra filtri ed ideali che conserva l'ordinamento per inclusione. Esistenza di ideali massimali ed esistenza di filtri massimali (detti ultrafiltri). Caratterizzazioni di ideali massimali e filtri massimali in funzione dell'appartenenza di un elemento a o del suo elemento duale a'. Esempi di ideali massimali.

Ideale nucleo di un omomorfismo booleano. Esempi e controesempi di ideali nucleo che sono ideali massimali. Intersezioni di ideali. Ideali generati da sottoinsiemi. Teorema fondamentale di omomorfismo di algebre booleane. Esempi ed applicazioni. Ideali massimali di un algebra booleana $\mathcal{A}$ ed omomorfismi booleani da $\mathcal{A}$ all'algebra booleana $\{0, 1\}$. Algebre semplici. Ogni algebra booleana semplice è isomorfa all'algebra booleana $\{0, 1\}$. Algebre booleane semplici ed ideali massimali. Atomi di un'algebra booleana. Algebre booleane atomiche ed algebre booleane non-atomiche. Esempi e controesempi. In un'algebra booleana atomica ogni elemento è uguale al sup dell'insieme dei suoi atomi. Un algebra booleana $\mathcal{A}$ è isomorfa ad un algebra booleana del tipo $P(X)$, per qualche insieme non vuoto X se e soltanto se atomica e completa.

Spazi topologici totalmente disconnessi. Spazi topologici booleani. Esempi: completamento di Alexandroff di uno spazio discreto. Completamento di Stone-Čech di uno spazio topologico discreto. Topologia prodotto e teorema di Thyconoff. Ogni algebra booleana finita è isomorfa all'algebra booleana di un spazio discreto finito. Esempi di algebre booleane finite. Algebra booleana duale di uno spazio topologico (booleano).

Spazio topologico booleano duale di un'algebra booleana. Ogni sottospazio chiuso di uno spazio topologico booleano è uno spazio topologico booleano. Ogni aperto-chiuso di un sottospazio chiuso Y di uno spazio topologico booleano X è l'intersezione con Y di uno spazio aperto-chiuso dello spazio topologico X. Per ogni elemento nonzero a di un'algebra booleana $\mathcal{A}$ esiste un omomorfismo booleano da $\mathcal{A}$ all'algebra booleana $\{0, 1\}$ che calcolato in a vale 1.

Teorema di rappresentazione di Stone delle algebre booleane: ogni algebra booleana $\mathcal{A}$ è canonicamente isomorfa all'algebra booleana duale dello spazio topologico booleano duale, dato da $\mathrm{Hom}_{bool}(\mathcal{A}, \{0, 1\})$, sottospazio chiuso dello spazio booleano $\{0, 1\}^{\mathcal{A}}$. Teorema di rappresentazione di Stone degli spazi topologici booleani: ogni spazio topologico booleano X è omeomorfo allo spazio topologico booleano duale dell'algebra booleana duale dello spazio X.

3. Teoria della divisibilità: MCD-domini

Introduzione alla teoria della divisibilità in un dominio D (anello commutativo, unitario, privo di divisori dello zero).

MCD e mcm. Elementi associati. $\mathrm{MCD}(a, b)$ esiste ed è esprimibile tramite una espressione lineare di a e b (identità di Bézout) se e soltanto se ogni ideale finitamente generato è principale. $\mathrm{mcm}(a,b)$ esiste se e soltanto se $aD \cap bD$ è un ideale principale. Dominio di Bézout è un dominio in cui ogni ideale finitamente generato è principale.

PID è un dominio in cui ogni ideale è principale. PID $\Rightarrow$ Bézout. Lemma di Euclide per un PID e, più generalmente, per un MCD-dominio (cioè, un dominio nel quale ogni coppia di elementi non entrambi nulli possiede un MCD).

MCD-dominio $\Leftrightarrow$ mcm-dominio (cioè, un dominio nel quale ogni coppia di elementi possiede un mcm). In un MCD-dominio, $\mathrm{MCD}(a,b)\cdot\ \mathrm{mcm}(a,b) = ab$.

Elementi primi ed elementi irriducibili: prime proprietà e caratterizzazioni. In un dominio arbitrario, un elemento primo è un elemento irriducibile. In un MCD-dominio, elemento primo $\Leftrightarrow$ elemento irriducibile.

Anelli noetheriani: definizione, caratterizzazioni ed esempi. PID $\Leftrightarrow$ dominio Bézout noetheriano. In un dominio noetheriano, ogni elemento non nullo possiede un divisore irriducibile. In un MCD-dominio noetheriano, ogni elemento non nullo possiede un divisore primo.

UFD (cioè, dominio a fattorizzazione unica): definizione e sue variazioni. In un UFD, elemento primo $\Leftrightarrow$ elemento irriducibile.

UFD $\Rightarrow$ MCD-dominio. PID $\Rightarrow$ UFD.

Anello di polinomi a coefficienti un MCD-dominio. Contenuto di un polinomio e polinomi primitivi. Teorema di Gauss per polinomi primitivi in un MCD-dominio. Dati due polinomi f, g in un MCD-dominio, allora $c(fg) = c(f)c(g)$. Un dominio di polinomi a coefficienti in un MCD-dominio è ancora un MCD-dominio.

Esempi di domini con "buone" o "cattive" proprietà rispetto alla relazione divisibilità. Caso di alcuni domini di interi in campi di numeri quadratici.

Anelli di valutazione e prime proprietà. Composizione di anelli di valutazione. Gli anelli $Z_{(2)}, Q[[X]]$, e $Z_{(2)} + XQ[[X]]$ sono anelli di valutazione. L'anello $Z_{(2)} + XQ[[X]]$ è un dominio di Bézout ma non un PID. L'anello di polinomi $Z[T]$ è un UFD che non è né un PID né un anello di Bézout. Ulteriori esempi e controesempi.

4. Numeri di Fibonacci

Introduzione ai numeri di Fibonacci. Numeri di Fibonacci e problema della natalità dei conigli. Maggiorazioni per l'n-esimo numero di Fibonacci.

Numero aureo. Formula di Binet che mette in relazione i numeri di Fibonacci ed il numero aureo (ed il suo coniugato). Il limite per n che tende all'infinito del rapporto di due numeri Fibonacci successivi tende al numero aureo.

Triangolo di Pascal-Tartaglia e coefficienti binomiali. Numeri di Fibonacci come sommatoria di coefficienti binomiali.

Algoritmo euclideo delle divisioni successive e MCD. Stima del numero massimo di divisioni successive per raggiungere il MCD. Teorema di G. Lamé. Versione binaria del

Teorema di Lamé. Esempi.

Due numeri di Fibonacci successivi sono coprimi. $\mathrm{MCD}(f_n, f_m) = f_d$, dove $d := \mathrm{MCD}(n, m)$. Esempi ed applicazioni.

5. Terne Pitagoriche

Terne pitagoriche: presentazione del problema, cenni storici, collegamento con la congettura di Fermat o FLT (ora, Teorema di Wiles-Taylor).

Terne pitagoriche primitive positive. Prime proprietà ed esempi. Teorema di descrizione di tutte le terne pitagoriche primitive (Formula di Euclide).

Data comunque una terna pitagorica (x, y, z) allora $60 \mid xyz$.

Terne pitagoriche con un lato e l'ipotenusa di lunghezza numeri primi: congettura sull'infinità di tali terne pitagoriche.

Corrispondenza biunivoca tra terne pitagoriche e punti a coordinate razionali della circonferenza unitaria. Corrispondenza biunivoca punti a coordinate razionali della circonferenza unitaria e punti dell'asse delle x con ascissa razionale (proiezione stereografica dal "polo nord" della circonferenza).

Il raggio della circonferenza inscritta in un triangolo pitagorico ha lunghezza intera.

Esistenza di triangoli pitagorici diversi che hanno la stessa aerea.

Non esistono triangoli pitagorici isosceli (irrazionalità di $\sqrt{2}$).

Triangoli pitagorici con stessa area e stessa ipotenusa sono uguali.

Esiste un unico triangolo pitagorico avente area uguale al perimetro.

Esistono infinite terne pitagoriche del tipo $(x, x+1, z)$.

Testi consigliati

[1] Steven Givant - Paul Halmos, *Introduction to Boolean algebras. Undergraduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, (2009).
[2] Paul R. Halmos, *ILectures on Boolean algebras. Van Nostrand Mathematical Studies, No. 1*. D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N.J., (1963).
[3] Ira J. Papick, *Algebra Connections: Mathematics for middle school teachers*. Prentice Hall, (2005).
[4] Hans Rademacher, *Higher mathematics from an elementary point of view. Edited by D. Goldfeld. With notes by G. Crane*. Birkhäuser, Boston, Mass., (1983).
[5] David Sharpe, *Rings and factorization*. Cambridge University Press, Cambridge, (1987).
[6] J. Eldon Whitesitt, *Boolean algebra and its applications*. Dover Publications Inc., (1995).

Bibliografia supplementare

[7] M. Fontana - S. Gabelli, *Insiemi, numeri e polinomi. Primo ciclo di lezioni del corso di Algebra con esercizi svolti*. CISU, (1989).
[8] Livia Giacardi, *I matematici e la formazione degli insegnanti in Italia nel primo Novecento (slides di una conferenza del 2012) - http://crf.uniroma2.it/wp-content/uploads/2012/05/Giacardi.pdf* .

Ulteriori informazioni su note disponibili in rete possono essere trovati sul sito www del corso:
`http://me410-12-13.blogspot.it`

Modalità d'esame

- valutazione in itinere ("esoneri")		■ SI	□ NO
- esame finale	scritto	■ SI	□ NO
	orale	□ SI	■ NO
- altre prove di valutazione del profitto (meglio descritte sotto)		■ SI	□ NO

Gli studenti che hanno sostenuto con esito positivo, nel corso del semestre, le prove di valutazione parziale (prove scritte di "esonero") accedono direttamente al colloquio di verbalizzazione del voto proposto dal docente, da effettuarsi durante la I Sessione di esame (Appello **A** o **B**).

Per tutti gli studenti che non si avvalgono della possibilità della valutazione del profitto durante il corso, l'esame finale consiste in una prova orale o/e scritta (comprendente anche domande di tipo teorico).

Gli studenti che non hanno frequentato il corso debbono prenotarsi almeno 10 giorni prima dell'appello d'esame, contattando il docente nell'orario di ricevimento.