ME410 - Matematiche Elementari da un Punto di Vista Superiore

A.A. 2012/2013 – Valutazione "in itinere" – Seconda Prova

AVVERTENZE: *Svolgere il tema, utilizzando al più 2 facciate di un foglio protocollo e scrivendo in modo chiaro e conciso (nel punteggio si terrà conto della leggibilità del testo elaborato).*

TEMA: Spazio topologico booleano duale di un'algebra booleana; algebra booleana duale di uno spazio topologico; enunciato del teorema di Stone.

ESERCIZIO 1. Nell'anello degli interi di Gauss $\mathbb{Z}[\boldsymbol{i}]$, si considerino le seguenti due fattorizzazioni di $10 \in \mathbb{Z}[\boldsymbol{i}]$:

$$(3+\boldsymbol{i})(3-\boldsymbol{i}) = 10 = 2 \cdot 5\,.$$

(1) Stabilire se $2,\ 5,\ 3+\boldsymbol{i},\ 3-\boldsymbol{i}$ sono elementi irriducibili o primi in $\mathbb{Z}[\boldsymbol{i}]$ e se da tali fattorizzazioni si possa dedurre che $\mathbb{Z}[\boldsymbol{i}]$ non è un dominio a fattorizzazione unica.

(2) Determinare, se esiste in $\mathbb{Z}[\boldsymbol{i}]$, $\mathrm{MCD}(3+\boldsymbol{i}, 2)$.

ESERCIZIO 2. Sia $f_1 := 1$, $f_2 := 1$ ed $f_n := f_{n-1} + f_{n-2}$, per $n \geq 3$. Determinare $\mathrm{MCD}(f_{12}, f_8)$.

ESERCIZIO 3.

Sia $\mathbb{F}_2 := \{0, 1\}$ l'algebra booleana con due elementi e sia $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ l'algebra booleana

$$(\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2, \vee, \wedge, \boldsymbol{'}, \mathbf{0}, \mathbf{1})\,.$$

(1) Mostrare esplicitamente che esiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme degli omomorfismi di algebre booleane $\mathrm{Hom}_{\mathtt{bool}}(\boldsymbol{\mathcal{A}}, \mathbb{F}_2)$ e l'insieme degli ideali massimali di $\boldsymbol{\mathcal{A}}$.

(2) Descrivere tutti gli ideali massimali $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ (cioè, elencare per ciascuno di essi tutti gli elementi).

(3) Mostrare che l'insieme $X := X(\boldsymbol{\mathcal{A}}) := \mathrm{Hom}_{\mathtt{bool}}(\boldsymbol{\mathcal{A}}, \mathbb{F}_2)$ dotato della topologia indotta da quella di $\mathbb{F}_2^{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ (insieme di tutte le applicazioni da $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ a $\mathbb{F}_2$, dotato della topologia prodotto assumendo che $\mathbb{F}_2$ è uno spazio topologico con la topologia discreta) è uno spazio topologico booleano.

(4) Definire esplicitamente un isomorfismo di algebre booleane tra $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ e l'algebra booleana $\boldsymbol{\mathcal{A}}(X)$ duale dello spazio topologico (booleano) X (cioè, l'algebra booleana –sottoalgebra booleana di $\boldsymbol{\mathcal{P}}(X)$– che ha come elementi i sottoinsiemi aperti–chiusi dello spazio topologico X).