
ME410 - Matematiche Elementari da un Punto di Vista Superiore
A.A. 2013/2014 – Valutazione “in itinere” – Prima Prova

AVVERTENZE: *Svolgere il tema, utilizzando al più 2 facciate di un foglio protocollo e scrivendo in modo chiaro e conciso (nel punteggio si terrà conto della leggibilità del testo elaborato).*

* * * * *

TEMA: Insiemi che hanno la cardinalità del continuo. Mostrare utilizzando il “secondo metodo diagonale” di Cantor che $\text{Card}(\mathbb{N}) \leq \text{Card}(\mathbb{R})$.

* * * * *

ESERCIZIO 1. Determinare la cardinalità dei seguenti insiemi, motivando adeguatamente la risposta:

$$\begin{aligned}\mathbb{N}^{(\mathbb{N})} &:= \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \mid f \text{ applicazione quasi-ovunque nulla}\}; \\ \mathbb{N}^{\mathbb{N}} &:= \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \mid f \text{ applicazione}\}.\end{aligned}$$

ESERCIZIO 2.

- (a) Sia $\mathbb{D}_{21} := \{d \mid d \text{ è un divisore di } 21 \text{ e } 1 \leq d \leq 21\}$. Presi comunque $d, d_1, d_2 \in \mathbb{D}_{21}$, si ponga:

$$\begin{aligned}d_1 \vee d_2 &:= \text{mcm}(d_1, d_2), \\ d_1 \wedge d_2 &:= \text{MCD}(d_1, d_2), \\ d' &:= \frac{21}{d},\end{aligned}$$

in modo che $(\mathbb{D}_{21}, \vee, \wedge, ', 1, 21)$ diventi un'algebra booleana.

Nell'anello booleano associato, calcolare esplicitamente i valori di $3 + 7$ e di $3 \cdot 7$.

- (b) Sia $(\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2, \vee, \wedge, ', (0, 0), (1, 1))$ l'algebra booleana canonicamente associata all'anello booleano prodotto diretto $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$. Stabilire se esiste un isomorfismo di algebre booleane tra $(\mathbb{D}_{21}, \vee, \wedge, ', 1, 21)$ e $(\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2, \vee, \wedge, ', (0, 0), (1, 1))$. In caso di risposta affermativa, descrivere un tale isomorfismo.
- (c) Stabilire se $\mathbb{D}_{27} := \{d \mid d \text{ è un divisore di } 27 \text{ e } 1 \leq d \leq 27\}$, con operazioni \vee e \wedge definite come sopra e con l'operazione $d' := \frac{27}{d}$, sia un'algebra booleana oppure no. In ogni caso, giustificare adeguatamente la risposta.