**ME410 - Matematiche Elementari da un Punto di Vista Superiore**
**A.A. 2016/2017 – Valutazione “in itinere” – Prima Prova**

---

**MATRICOLA (O ALTRO IDENTIFICATIVO)** $\rightarrow$ [ ]

**Cognome:**.................................................. **Nome:**..................................................

---

**AVVERTENZE:**

• *Svolgere il tema, utilizzando* **al più 3 facciate di un foglio protocollo** *e scrivendo in modo chiaro e conciso (nel punteggio si terrà conto della leggibilità del testo elaborato).*

• *Svolgere gli esercizi nello spazio assegnato nelle pagine successive di questo fascicolo.*

* * * * * * *

**TEMA:** Il Teorema di Cantor-Schröder-Bernstein ed il suo ruolo nella teoria della cardinalità.

* * * * * * *

**ESERCIZIO 1.** Sia $\mathbb{D}_{30} := \{d \mid d$ è un divisore di 30 e $1 \le d \le 30\}$. Presi comunque $d, d_1, d_2 \in \mathbb{D}_{30}$, si ponga:

$$\begin{aligned} d_1 \vee d_2 :=& \quad \mathrm{mcm}(d_1, d_2)\,, \\ d_1 \wedge d_2 :=& \quad \mathrm{MCD}(d_1, d_2)\,, \\ d' :=& \quad \tfrac{30}{d}\,, \end{aligned}$$

E' noto che $(\mathbb{D}_{30}, \vee, \wedge, \,', 1, 30)$ è un'algebra booleana.

**(a)** Si consideri il sottoinsieme $\mathbb{D}_{15} := \{\delta \mid \delta$ è un divisore di 15 e $1 \le \delta \le 15\}$.

**(a.1)** Stabilire se $\mathbb{D}_{15}$ (con le operazioni $\vee$, $\wedge$, $\,'$ indotte da quelle di $\mathbb{D}_{30}$) forma una sottoalgebra booleana di $\mathbb{D}_{30}$.

**(a.2)** Stabilire se $\mathbb{D}_{15}$ (con le operazioni $\vee$ e $\wedge$ indotte da quelle di $\mathbb{D}_{30}$) forma un ideale di $\mathbb{D}_{30}$.

**(a.3)** Determinare tutti gli ideali dell'algebra booleana $\mathbb{D}_{30}$.

**(b)** Si consideri l'algebra booleana $(\mathbb{D}_{15}, \vee, \wedge, \,^{\blacktriangledown}, 1, 15)$, dove $\delta^{\blacktriangledown} := \frac{15}{\delta}$, per ogni $\delta \in \mathbb{D}_{15}$ e sia $\varphi : \mathbb{D}_{30} \to \mathbb{D}_{15}$ l'applicazione definita da $\varphi(d) := \mathrm{MCD}(d, 15)$, per ogni $d \in \mathbb{D}_{30}$.

**(b.1)** Mostrare che $\varphi$ è un omomorfismo suriettivo di algebre booleane.

**(b.2)** Descrivere esplicitamente l'ideale $\mathrm{Ker}(\varphi)$ di $\mathbb{D}_{30}$.

**(b.3)** Stabilire se esiste un elemento $\tilde{d} \in \mathbb{D}_{30}$ in modo tale che $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathbb{D}_{\tilde{d}}$ $(= \{\delta \mid \delta$ è un divisore di $\tilde{d}$ e $1 \le \delta \le \tilde{d}\})$.

**(c)** Nell'anello booleano associato all'algebra booleana $\mathbb{D}_{15}$, calcolare esplicitamente i valori di $3 + 5$ e di $3 \cdot 5$.

**(d)** Sia $(\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2, \vee, \wedge, \,', (0,0), (1,1))$ l'algebra booleana canonicamente associata all'anello booleano prodotto diretto $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$ (nel quale le operazioni di somma e prodotto sono definite componente per componente).
Stabilire (spiegando le ragioni) se esiste un isomorfismo di algebre booleane tra $(\mathbb{D}_{15}, \vee, \wedge, \,^{\blacktriangledown}, 1, 15)$ e $(\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2, \vee, \wedge, \,', (0,0), (1,1))$. In caso di risposta affermativa, descrivere elemento per elemento un tale isomorfismo.

**ESERCIZIO 2.** Sia $\mathbb{C}$ l'insieme dei numeri complessi, sia $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ l'insieme delle parti di $\mathbb{C}$ e sia $\mathbf{3}$ l'insieme con tre elementi $\{0, 1, 2\}$. Se $A$ e $B$ sono due insiemi, $B^A$ denota l'insieme $\{f : A \to B \mid f \text{ applicazione}\}$.

**(a)** Determinare la cardinalità dell'insieme $\mathbf{3}^{\mathbb{C}}$ e dell'insieme $\mathbb{C}^{\mathbf{3}}$, spiegando il ragionamento ed i risultati teorici utilizzati per arrivare alla conclusione.

**(b)** Stabilire se la cardinalità dell'insieme $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ è confrontabile con la cardinalità dell'insieme $\mathbb{C}^{\mathbb{C}}$.

**(c)** $\mathbb{I} := \{\alpha \in \mathbb{C} \mid f(\alpha) = 0 \text{ dove } 0 \neq f \in \mathbb{Z}[X] \text{ ed } f \text{ ha coefficiente direttore uguale ad } 1\}$. Calcolare la cardinalità di $\mathbb{I}$ confrontandola con quella di $\mathbb{C}$ e di $\mathbb{N}$.

**ESERCIZIO 3.**

**(a)** Dimostrare che un anello booleano ha caratteristica 2.
**(b)** Dimostrare che in un anello booleano ogni ideale primo è massimale.
**(c)** Descrivere esplicitamente tutti gli ideali primi dell'anello booleano $(\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2, +, \cdot)$.