AL110 Algebra 1

A.A. 2010/2011

Prof. Marco Fontana

1. Insiemi ed applicazioni

Nozione intuitiva di insieme. Operazioni tra insiemi (unione, intersezione, differenza, complementare) e loro proprietà. Differenza simmetrica di due insiemi. Insieme delle parti. Esempi.

Elementi di logica elementare. Tabelle della verità. Negazioni e quantificatori universali. Vari tipi di dimostrazione per assurdo.

Prodotto cartesiano di insiemi. Corrispondenze, relazioni e applicazioni. Corrispondenza inversa di una applicazione. Applicazione identica ed applicazioni costanti. Esempi. Prodotto operatorio di applicazioni e sue prime proprietà. Applicazioni iniettive, suriettive e biiettive; loro caratterizzazioni. Applicazioni tra insiemi finiti. Funzione caratteristica di un sottoinsieme di un insieme. Biiezione tra l'insieme delle parti di un insieme X con l'insieme $\{0,1\}^X$. Esempi.

Ricoprimenti e partizioni. Relazioni d'equivalenza e partizioni. Insieme quoziente. Esempi. Relazione d'equivalenza ("nucleo") associata ad una applicazione. Teorema fondamentale di decomposizione di una applicazione. Esempi.

Cenni su: relazioni di ordine e ordine totale; insiemi ordinati; maggioranti, minoranti, elementi massimali, elementi minimali, minimo e massimo, estremi inferiori e superiori.

2. Numeri Naturali

Assiomi di Peano; addizione, moltiplicazione e relazione d'ordine nell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali. Principio di induzione (e sua formulazione "ampia"). Principio del Buon Ordinamento (cenni). Dimostrazioni per induzione. Coefficienti binomiali e triangolo di Tartaglia (cenni).

Equivalenza tra il Principio del Buon Ordinamento ed il Principio di Induzione. Vari tipi di dimostrazione per induzione. Esempi.

3. Insiemi numerici

Costruzione di $\mathbb{Z}$ (numeri interi relativi) a partire da $\mathbb{N}$ e di $\mathbb{Q}$ (numeri razionali) a partire da $\mathbb{Z}$. Introduzione delle operazioni di somma e prodotto e della relazione di ordine in $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$. Prime proprietà.

Costruzione dell'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi. Rappresentazione "geometrica" dei numeri complessi nel piano di Gauss. Rappresentazione trigonometrica (o, forma polare) di un numero complesso; formula di de Moivre; radici n-esime di un numero complesso. Radici n-esime dell'unità e radici primitive (cenni).

4. Divisibilità in $\mathbb{Z}$ e congruenze modulo n.

Divisione con il resto. Esistenza di MCD e mcm; algoritmo di Euclide per la determinazione del MCD. Identità di Bézout. Lemma di Euclide. Scrittura in base b ($b > 1$) dei numeri naturali.

Numeri primi. Elementi irriducibili. Teorema fondamentale dell'aritmetica. Teorema sull'infinità dei numeri primi. Crivello di Eratostene.

Congruenze e criteri di divisibilità. "Prova del nove". Somma e prodotto nell'insieme quoziente $\mathbb{Z}/\equiv_n$ delle classi resto modulo un intero $n > 1$. Principali proprietà algebriche ed aritmetiche di $(\mathbb{Z}/\equiv_n, +, \cdot\ )$. Elementi invertibili e "divisori dello zero" in $\mathbb{Z}/\equiv_n$. Indicatore (o, funzione φ) di Euler.

Il "piccolo" teorema di Fermat. Il Teorema di Euler-Fermat (cenni).

Calcolo di un inverso aritmetico mod n. Congruenze lineari in una indeterminata. Criterio di risolubilità, numero di soluzioni e ricerca di soluzioni. Esempi.

Sistemi di congruenze lineari. Teorema cinese dei resti. Risoluzione di sistemi di congruenze lineari. Esempi

5. Cenni sulle strutture algebriche: Gruppi ed Anelli

Operazioni e loro proprietà. Elementi neutri e invertibili. Unicità dell'elemento neutro e dell'inverso di un elemento. Notazione additiva e moltiplicativa.

Gruppi. Gruppi abeliani. Esempi. Prime proprietà. Leggi di cancellazione. Sottogruppi. Esempi. Sottogruppi normali. Esempi. Omomorfismi di gruppi. Esempi. Prime proprietà. Teorema Fondamentale di Omomorfismo di gruppi. Esempi.

Gruppi di permutazioni. Prime proprietà del gruppo S_n (cenni).

Anelli. Esempi. Prime proprietà. Anelli commutativi e unitari. Esempi. Elementi invertibili e divisori dello zero. Domini d'integrità. Campi. Esempi. Omomorfismi di anelli. Prime proprietà. Esempi. Teorema Fondamentale di Omomorfismo di anelli. Esempi. Caratteristica di un anello unitario (cenni).

6. Polinomi

Polinomi e serie formali in una indeterminata: somma, prodotto (di convoluzione). Polinomi a coefficienti in un dominio d'integrità: grado. Prime proprietà. Elementi invertibili e associati.

Polinomi monici. Divisione con il resto tra polinomi. Teorema del resto. Regola di Ruffini. Esempi. Radici di un polinomio. Esistenza di radici e riducibilità. Ricerca di radici intere e razionali di polinomi a coefficienti interi.

Polinomi a coefficienti numerici. Enunciato del Teorema Fondamentale dell'Algebra. Polinomi irriducibili di $\mathbb{C}[X]$ e di $\mathbb{R}[X]$.

Polinomi a coefficienti interi: contenuto di un polinomio, polinomi primitivi. Lemma di Gauss. Teorema di fattorizzazione unica in $\mathbb{Z}[X]$ (cenni). Polinomi irriducibili in $\mathbb{Z}[X]$ ed in $\mathbb{Q}[X]$.

Polinomi a coefficienti in un campo K (cenni): algoritmo di divisione, esistenza ed unicità del MCD monico. Identità di Bézout. Polinomi irriducibili e teorema di fattorizzazione unica in $K[X]$ (cenni).

Testi consigliati

[1] M. Fontana – S. Gabelli, *Insiemi, numeri e polinomi. Primo ciclo di lezioni del Corso di Algebra con esercizi svolti*. CISU, (1989).
[2] M. Fontana – S. Gabelli, *Esercizi di Algebra*. Aracne, (1993).
[3] M. Fontana, *Appunti sui primi rudimenti di teoria dei gruppi e teoria degli anelli*. http://al110-algebra1.blogspot.com/,
[4] G.M. Piacentini Cattaneo, *Algebra, un approccio algoritmico*. Decibel – Zanichelli, (1996).

Bibliografia supplementare

[5] R.B.J. Allenby, *Rings, fields and groups*. E. Arnold, Hodder& Staughton, (1991).
[6] M. Artin, *Algebra*. Prentice–Hall, (1991).
[7] L. Childs, *Algebra, un'introduzione concreta*. Springer (1983) e ETS (1989),
[8] D. Dikranjan - M.S. Lucido, *Aritmetica e algebra*. Liguori Editore, (2007).
[9] T.W. Hungerford, *Algebra, Graduate Texts in Mathematics*. Springer, (1980).

Modalità d'esame

- valutazione in itinere ("esoneri")		■ SI	□ NO
- esame finale	scritto	■ SI	□ NO
	orale	□ SI	■ NO
- altre prove di valutazione del profitto (meglio descritte sotto)		□ SI	■ NO

Valutazione in itinere (esoneri)

La valutazione del profitto viene effettuata di preferenza durante il semestre. Gli studenti frequentanti sono invitati a svolgere periodicamente esercizi per casa (che sono proposti durante le lezioni, esercitazioni e tutorato). Durante il tutorato viene fornito supporto anche per la risoluzione degli esercizi per casa. Inoltre, sono previste una prova scritta a metà semestre ed una prova scritta a fine semestre. Gli studenti che hanno sostenuto con esito positivo, nel corso del semestre, le prove di valutazione parziale (prove scritte) accedono direttamente al colloquio di verbalizzazione del voto proposto dal docente, da effettuarsi esclusivamente durante la I Sessione di esame (Appello A).

Valutazione finale

L'esame finale consiste di una prova scritta nella quale sono presenti questioni di carattere teorico.

Si noti che, in presenza di una valutazione positiva delle prove parziali durante il corso, l'eventuale consegna da parte dello studente della successiva prova scritta di esame comporta la rinuncia implicita al "voto di esonero". *Pertanto, in tal caso, la valutazione del profitto del corso verrà effettuata in base alla prova d'esame.*