AL3 - Fondamenti di algebra commutativa - A.A. 2009/2010
Valutazione "in itinere" – Seconda Prova

AVVERTENZE: *Svolgere il tema,* **utilizzando al più 3 facciate** *di un foglio protocollo e scrivendo in modo chiaro e conciso (nel punteggio si terrà conto della leggibilità del testo elaborato).*

tema (punteggio max)	15										
esercizio	1, a	1, b	1, c.1	1, c.2	1, d	1, e	2, a	2, b	2, c	2, d	2, e
punteggio max	1	2	1	3	3	5	3	3	5	2	2

TEMA: *Domini di Dedekind e domini di valutazione discreta: enunciare i principali risultati, dando di alcuni di essi le dimostrazioni.*

ESERCIZIO 1. Sia A un anello. Siano P un suo ideale primo, Q un ideale P-primario, $a \in A$ ed $I_1, I_2, ... I_n$ ideali arbitrari di A.

(a) Mostrare che, se $P \supseteq I_1 \cap I_2 \cap ... \cap I_n$, allora $P \supseteq I_k$, per qualche k, $1 \leq k \leq n$.

(b) Mostrare che, se $P = I_1 \cap I_2 \cap ... \cap I_n$, allora $P = I_k$, per qualche k, $1 \leq k \leq n$.

(c) Si consideri l'ideale $(Q :_A aA) := \{\alpha \in A \mid \alpha \cdot a \in Q\}$. Mostrare che:

(c.1) Se $a \in Q$, allora $(Q :_A aA) = A$;

(c.2) Se $a \in A \setminus Q$, allora $(Q :_A aA)$ è P-primario.
[Suggerimento: considerare i casi $a \in A \setminus P$ ed $a \in P \setminus Q$.]

(d) Mostrare che

$$((I_1 \cap I_2 \cap ... \cap I_n) :_A aA) = (I_1 :_A aA) \cap (I_2 :_A aA) \cap ... \cap (I_n :_A aA),$$
$$\mathrm{rad}(I_1 \cap I_2 \cap ... \cap I_n) = \mathrm{rad}(I_1) \cap \mathrm{rad}(I_2) \cap ... \cap \mathrm{rad}(I_n).$$

Si supponga ora che A sia noetheriano, che $I = Q_1 \cap Q_2 \cap ... \cap Q_r$ sia una decomposizione primaria di un suo ideale I, e che $P_k := \mathrm{rad}(Q_k)$, per $1 \leq k \leq r$.

(e) Mostrare che gli ideali primi $P_1, P_2, ..., P_r$ coincidono con gli ideali che sono primi nel seguente insieme di ideali radicali

$$\{\mathrm{rad}\,((I :_A aA)) \mid a \in A\}$$

(quindi, gli ideali primi $P_1, P_2, ..., P_r$ non dipendono dalla decomposizione primaria di I).

.... un secondo esercizio nella pagina successiva ...

ESERCIZIO 2. Sia $V := \mathbb{Q}[\![X]\!]$ il dominio delle serie formali a coefficienti nel campo $\mathbb{Q}$ dei razionali, sia $W := \mathbb{Z}_{(2)} := \{a/b \mid a, b \in \mathbb{Z},\ 2 \nmid b\}$. Sia

$$D := W + XV = \mathbb{Z}_{(2)} + X\mathbb{Q}[\![X]\!]$$

il dominio delle serie formali a coefficienti nel campo $\mathbb{Q}$ *e con termine noto in* $\mathbb{Z}_{(2)}$.

(a) Sia $P := X\mathbb{Q}[\![X]\!]$. Mostrare che $P \in \mathrm{Max}(V)$ e $P \in \mathrm{Spec}(D) \setminus \mathrm{Max}(D)$, con $P \subsetneq M := 2\mathbb{Z}_{(2)} + X\mathbb{Q}[\![X]\!]$ ed $M \in \mathrm{Max}(D)$.

(b) Osservare che $\mathbb{Z}^* := \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ è una parte moltiplicativa di D contenuta in $D \setminus P$ e dimostrare che $D_P = \mathbb{Q}[\![X]\!]$ e che $PD_P = P$.

(c) Dimostrare che D è un dominio di valutazione nel suo campo dei quozienti che coincide con $\mathbb{Q}(\!(X)\!)$, il campo delle serie formali di Laurent a coefficienti in $\mathbb{Q}$ (che è anche il campo dei quozienti di $\mathbb{Q}[\![X]\!]$).

(d) Mostare che $\mathrm{Spec}(D) = \{(0) \subset P \subset M\}$ e che quindi $\dim(D) = 2$.

(e) Mostare che D/P e D_P sono entrambi domini di valutazione discreta.