

AL5 Anelli commutativi ed ideali

A.A. 2007/2008

Prof. Marco Fontana

Teoria degli anelli di valutazione ed applicazioni

Richiami su vari argomenti della teoria degli anelli commutativi.

Teoria della divisibilità in un dominio. Domini di Bézout, domini a fattorizzazione unica e loro caratterizzazioni, domini ad ideali principali. Ideali primi e massimali, ideali radicali. Dipendenza integrale e normalizzazione. Stabilità della chiusura integrale rispetto a varie operazioni tra anelli. Lemma (x, x^{-1}) . Anelli di valutazione come elementi massimali nell'insieme dei domini locali ordinati per dominanza. Teorema di Krull sulla chiusura integrale. Teorema di Krull sulla chiusura integrale.

Valutazioni. Gruppi di valori. Gruppi (totalmente) ordinati. Gruppi di divisibilità. Estensioni di valutazioni. Anello associato ad una valutazione. Anello di valutazione e prime proprietà. Equivalenza di valutazioni. Esempi. Corrispondenza biunivoca tra anelli di valutazioni e classi di valutazioni equivalenti. Sopraanelli di anelli di valutazione, ideali primi e sottogruppi isolati del gruppo di valori. Valutazioni discrete. Valutazioni p -adiche. Anelli di serie formali. Localizzazioni di anelli di polinomi a coefficienti in un campo. Valori assoluti, valori assoluti ultrametrici e collegamento con la teoria classica delle valutazioni con gruppo di valori reale (valutazioni di rango 1). Estensioni delle valutazioni discrete canoniche dei campi di serie formali. Posti e composizione di posti. Esempi. Valutazioni discrete. Uniformizzante. Fattorizzazione unica rispetto al parametro uniformizzante. Ideali in un anello di valutazione discreta. Varie caratterizzazioni degli anelli di valutazione discreta. Valutazioni discrete normalizzate.

Gruppo di valori, gruppo di divisibilità di un qualsiasi dominio, gruppi ordinati filtrati e gruppi ordinati reticolari. Dato un gruppo abeliano (totalmente) ordinato esiste sempre un anello di valutazione avente gruppo dei valori il gruppo ordinato assegnato.

Teoria della ramificazione. Indici di ramificazione e gradi residui. Teoremi di approssimazione per valutazioni indipendenti.

Anelli e campi topologici. Topologie adiche. Completamenti. Completamenti di anelli di valutazione discreta del tipo $k + M$ ed immersioni in campi di serie di Laurent. Completamenti di anelli di valutazione di tipo generale (cenni).

Ideali frazionari, ideali frazionari invertibili. Ideali finitamente generati, ideali invertibili ed ideali localmente principali. Ideali invertibili ed ideali principali: caso di un dominio locale. Conduttore di un sopraanello di un dominio. Domini di Prüfer e domini di Bézout. Domini di Dedekind e domini ad ideali principali. Esempi e controesempi. Domini di Prüfer come domini localmente di valutazione. Ulteriori caratterizzazioni dei domini di Prüfer. Sopranelli locali, e non, di domini di Prüfer. Anelli di valutazione di $K(X)$ che sono algebre sopra il campo K .

Intersezioni finite di anelli di valutazione inconfrontabili. Domini di Prüfer semilocali e domini di Bézout.

Campi di funzioni algebriche. Superficie di Riemann astratta associata ad un campo di funzioni algebriche in una variabile (Dedekind-Weber, Zariski). Superficie di Riemann astratte e spazi spettrali di Hochster. Proprietà topologiche di una superficie di Riemann astratta. Estensione di Olberding di una superficie di Riemann astratta (cenni).

Introduzione agli anelli di funzioni di Kronecker. Anello di Nagata. Operazioni star ed operazioni star e.a.b. Esempi. La b -operazione la v -operazione e la d -operazione: caso dei domini di Prüfer e dei domini di Krull. Gli anelli $\text{Na}(D, \star)$ e $\text{Kr}(D, \star)$: principali proprietà. Studio dei sopraanelli e dei sopraanelli locali (di valutazione) degli anelli di funzioni di Kronecker. La superficie di Riemann $\text{Zar}(D)$ per ogni dominio è uno spazio spettrale omeomorfo allo $\text{Spec}(\text{Kr}(\bar{D}, b))$ (dove \bar{D} è la chiusura integrale di D nel suo campo dei quozienti).

TESTI CONSIGLIATI

- [1] N. BOURBAKI, *Algèbre commutative, Ch. 1, 2, 5, 6*. Hermann, (1961-1965).
- [2] M. FONTANA, *Appunti manoscritti di un corso tenuto all'INdAM*.
- [3] M. FONTANA, *Appunti del corso di AL5, raccolti da Alice Fabbri, disponibili all'indirizzo http://www.mat.uniroma3.it/users/fontana/didattica/al5_07-08.html*.
- [4] R. GIMER, *Multiplicative ideal theory*. Dekker, (1972).
- [5] I. KAPLANSKY, *Commutative rings*. Allyn and Bacon, (1970).
- [6] P. RIBENBOIM, *The theory of classical valuations*. Springer, (1999).
- [7] O. ZARISKI, P. SAMUEL, *Commutative Algebra*. Van Nostrand, (1958).

BIBLIOGRAFIA SUPPLEMENTARE

- [8] M.F. ATIYAH, I.G. MACDONALD, *Introduction to Commutative Algebra*. AddisonWesley, (1969).
- [9] G. BACHMAN, *Introduction to p-adic numbers and valuation theory*. Academic Press, (1964).
- [10] O. ENDLER, *Valuation theory*. Springer, (1972).
- [11] A. FABBRI, *Teoria delle Valutazioni e Superficie di Riemann Astratte*. Tesi di Laurea, Università degli Studi "Roma Tre", (2006).
- [12] M. FONTANA, J. HUCKABA, I. PAPICK, *Prüfer domains*. Dekker, (1997).
- [13] M. KNEBUSCH, D. ZHANG, *Manis valuations and Prüfer extensions, I*. Springer, (2002).
- [14] HUI SHI LI, *An Introduction to Commutative Algebra*. World Scientific, (2004).
- [15] M. NAGATA, *Local rings*. Wiley Interscience, (1962).
- [16] P. RIBENBOIM, *Théorie des valuations*. Presses de l'Université de Montréal, (1964).
- [17] O.F.G. SCHILLING, *The theory of valuations*. American Mathematical Society, (1950).

Ulteriori informazioni su note di lezioni e libri disponibili in rete possono essere trovati sul sito [www](http://www.mat.uniroma3.it/users/fontana/didattica/al5_07-08.html) del corso:

http://www.mat.uniroma3.it/users/fontana/didattica/al5_07-08.html

MODALITÀ D'ESAME

- valutazione in itinere ("esoneri")	<input checked="" type="checkbox"/> SI <input type="checkbox"/> NO
- esame finale	scritto <input checked="" type="checkbox"/> SI <input type="checkbox"/> NO
	orale <input type="checkbox"/> SI <input checked="" type="checkbox"/> NO
- altre prove di valutazione del profitto (meglio descritte sotto)	<input checked="" type="checkbox"/> SI <input type="checkbox"/> NO

Gli studenti che hanno sostenuto con esito positivo, nel corso del semestre, le prove di valutazione parziale ("esoneri" e seminari) accedono direttamente al colloquio di verbalizzazione del voto proposto dal docente, da effettuarsi durante la I Sessione di Esame (Appello **A** o **B**).

Per tutti gli studenti che non si avvalgono della possibilità della valutazione del profitto durante il corso, l'esame finale consiste in una prova orale o/e scritta, comprendente anche domande di tipo teorico.

Gli studenti che non hanno frequentato il corso debbono prenotarsi almeno 10 giorni prima dell'appello d'esame, contattando il docente nell'orario di ricevimento.