Capitolo 3

Spazi Noetheriani

3.1 Proprietà topologiche generali

3.1 Proposizione. *Sia $(M, \leq)$ un insieme parzialmente ordinato. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti.*

(1) *Ogni successione non decrescente (diremo anche catena ascendente) $x_1 \leq x_2 \leq \ldots$ in M è stazionaria (ovvero esiste un numero naturale r tale che $x_n = x_r$, per ogni $n > r$).*

(2) *Ogni sottoinsieme non vuoto di M ammette un elemento massimale.*

DIMOSTRAZIONE. (1) implica (2). Supponiamo per assurdo che esista un sottoinsieme non vuoto Σ di M che non ammetta elementi massimali: poiché Σ è non vuoto, esiste $x_1 \in \Sigma$. Poiché inoltre tale elemento non può essere massimale, allora esiste $x_2 \in \Sigma$ tale che $x_1 < x_2$. Procedendo per induzione si costruisce una successione crescente non stazionaria a elementi in M, e ciò è assurdo. Viceversa, si osserva subito che una successione non decrescente $\Sigma = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ a elementi in M costituisce un sottoinsieme non vuoto di M e pertanto dall'esistenza dell'elemento massimale in Σ segue subito che la catena considerata è stazionaria. $\square$

Quando in un insieme parzialmente ordinato M vale la condizione (1) di (3.1), diremo anche che M soddisfa la condizione della catena ascendente.

3.2 Definizione. *Uno spazio topologico X si dice Noetheriano se ogni catena numerabile ascendente di aperti è stazionaria, o, per (3.1), se, detto ϑ l'insieme degli aperti di X, parzialmente ordinato mediante la relazione di inclusione, ogni sottoinsieme non vuoto di ϑ ammette un elemento massimale.*

Si osserva immediatamente che uno spazio topologico è Noetheriano se e soltanto se ogni successione non crescente di chiusi è stabile o, equivalentemente, se ogni collezione non vuota di chiusi ha un elemento minimale (rispetto all'inclusione).

Faremo vedere come la struttura algebrica di un anello A sia legata alla Noetherianità di $\mathrm{Spec}(A)$. Cominciamo con il provare il seguente

3.3 Lemma. *Se X è uno spazio topologico Noetheriano, allora ogni sottospazio di X è Noetheriano.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo per assurdo che esista un sottospazio Y di X che non sia Noetheriano. Allora esiste una catena ascendente di aperti di Y

$$A_1 \cap Y \subset A_2 \cap Y \subset \dots$$

che non è stazionaria (si osservi che A_n è aperto in X per ogni $n \in \mathbb{N}$ per definizione di topologia indotta). Consideriamo adesso l'insieme definito ponendo

$$\Sigma = \left\{ \bigcup_{h=1}^{n} A_h : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Σ è un insieme non vuoto di aperti di X e quindi ammette un elemento massimale $A_1 \cup A_2 \cup \dots A_n$, per ipotesi. Poiché si ha $A_n \cap Y \subset A_{n+1} \cap Y$, si ottiene, in particolare, che esiste $a \in A_{n+1} \cap Y$ tale che $a \notin A_n$. A fortiori si ha $a \notin A_r$, per ogni $r \leq n$. Allora

$$\bigcup_{r=1}^{n} A_r \subset \bigcup_{r=1}^{n+1} A_r,$$

contro la massimalità di $\bigcup_{r=1}^{n} A_r$ in Σ. □

3.4 Proposizione. *Se X è uno spazio topologico Noetheriano, allora X è compatto.*

DIMOSTRAZIONE. Sia X uno spazio topologico Noetheriano. Supponiamo per assurdo che X non sia compatto, cioè esiste un ricoprimento aperto $\mathcal{F} = \{A_r : r \in R\}$, con R insieme arbitrario di indici, che non ammette alcun sottoricoprimento finito. Per ogni sottoinsieme finito T di R consideriamo l'aperto $A(T)$ definito ponendo

$$A(T) = \bigcup_{r \in T} A_r,$$

e denotiamo con Σ l'insieme

$$\Sigma = \{A(T) : T \text{ sottoinsieme finito di } R\}.$$

Si osserva subito che Σ è non vuoto e quindi ammette un elemento massimale $A(V)$ (V sottoinsieme finito di R). Poiché $\mathcal{F}$ non ammette sottoricoprimenti finiti deve risultare

$$A(V) = \bigcup_{r \in V} A_r \subset X,$$

ovvero esiste $x \in X$ tale che $x \notin A_r$ per ogni $r \in V$. Ma, siccome gli aperti di $\mathcal{F}$ ricoprono X, dovrà esistere $r^* \in R \backslash V$ tale che $x \in A_{r^*}$. Consideriamo adesso l'insieme $S = V \cup \{r^*\}$. Osservato che S è un sottoinsieme finito di R deve risultare

$$A(S) = \bigcup_{r \in S} A_r = \bigcup_{r \in V} A_r \cup A_{r^*} \in \Sigma.$$

Inoltre si ha $A(V) \subset A(S)$, contro la massimalità di $A(V)$ in Σ. □

3.5 Proposizione. *Sia X uno spazio topologico. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti.*

(α) *X è Noetheriano.*

(β) *Ogni aperto di X è compatto.*

(γ) *Ogni sottospazio di X è compatto.*

DIMOSTRAZIONE. $(\alpha) \Rightarrow (\gamma)$: detto Y un sottospazio di X, da (3.3) segue che Y è Noetheriano e, per (3.4), Y è compatto.
$(\gamma) \Rightarrow (\beta)$: ovvia.
$(\beta) \Rightarrow (\alpha)$: sia $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$ una catena ascendente numerabile di aperti di X. Se A è l'aperto di X definito ponendo

$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n,$$

per ipotesi si ha la compatezza di A. Poiché è evidente che $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ è un ricoprimento aperto di A, da (2.11) segue l'esistenza di un sottoinsieme finito R di $\mathbb{N}$ tale che

$$A = \bigcup_{r \in R} A_r.$$

Allora, detto $m = \max R$, poiché la catena assegnata è ascendente, deve ottenersi

$$A = A_m,$$

e quindi, per ogni $n > m$, si ha $A_m = A_n$. Questo completa la dimostrazione. □

Vogliamo mostrare che l'insieme delle componenti irriducibili di uno spazio topologico Noetheriano è finito. Per il nostro fine, il seguente elementare lemma sarà cruciale.

3.6 Lemma. *Siano X uno spazio topologico e $\mathcal{F}$ una collezione finita di sottospazi chiusi e irriducibili di X che ricopre X. Allora valgono le seguenti asserzioni.*

(i) *Se T è un sottospazio irriducibile di X, allora $T \subseteq Y$, per qualche $Y \in \mathcal{F}$.*

(ii) *Se gli elementi di $\mathcal{F}$ sono a due a due incomparabili, allora $\mathcal{F}$ è la famiglia delle componenti irriducibili di X.*

DIMOSTRAZIONE. (i). Sia T un sottospazio irriducibile di X. Allora $T = \bigcup\{T \cap Y : Y \in \mathcal{F}\}$. Poiché $\mathcal{F}$ è finita si deve avere $T = T \cap Y$, per qualche $Y \in \mathcal{F}$. Questo prova (i).
(ii). Sia C una componente irriducibile di X. Allora, per (i), esiste un elemento $Y \in \mathcal{F}$ tale che $C \subseteq Y$. Quindi $C = Y$, per massimalità. Viceversa, sia $Y \in \mathcal{F}$. Se Y non fosse una componente irriducibile, esisterebbe un insieme irriducibile $T \subseteq X$ tale che $Y \subsetneq T$. Per (i), possiamo fissare un elemento $Z \in \mathcal{F}$ tale che $T \subset Z$, e quindi $Y \subseteq Z$, contro il fatto che gli elementi di $\mathcal{F}$ sono a due a due incomparabili. □

3.7 Teorema. *Sia X uno spazio topologico Noetheriano. Allora l'insieme delle componenti irriducibili di X è finito e ricopre X.*

DIMOSTRAZIONE. Siano $\mathcal{C}$ la famiglia dei chiusi di X e $\mathcal{G}$ la sottofamiglia di $\mathcal{C}$ costituita dai chiusi di X che sono unione finita di chiusi irriducibili. Se $X \notin \mathcal{G}$, allora $\mathcal{C} \setminus \mathcal{G}$ è una collezione non vuota di chiusi di X, e ha un elemento minimale Z, essendo X uno spazio topologico Noetheriano. Essendo $Z \notin \mathcal{G}$, Z è riducibile, e quindi esistono chiusi $F, G \supsetneq Z$ tali che $F \cup G = Z$. Per la minimalità di Z in $\mathcal{C} \setminus \mathcal{G}$, si ha $F, G \in \mathcal{G}$. Equivalentemente, F, G sono unione finita di chiusi irriducibili, e pertanto tale risulta Z, una contraddizione. Questo mostra che $X \in \mathcal{G}$. Allora esiste una famiglia finita $\mathcal{F}'$ di chiusi irriducibili di X che ricopre X. Detta $\mathcal{F}$ la collezione degli degli elementi di $\mathcal{F}'$ che non sono contenuti nell'unione dei rimanenti, si ha che $\mathcal{F}$ ricopre X e i suoi elementi sono a due a due incomparabili, in particolare. Allora basta usare (3.6,ii) per concludere la dimostrazione. $\square$

3.2 Lo spettro primo di un anello Noetheriano

3.8 Definizione. *Diremo che un $A-$modulo M è Noetheriano se ogni catena ascendente numerabile di sottomoduli di M è stazionaria, ovvero, per (3.1), se, detto S l'insieme dei sottomoduli di M, parzialmente ordinato dalla relazione di inclusione, ogni sottoinisieme non vuoto di S ammette un elemento massimale.*

Non è difficile provare la seguente

3.9 Proposizione. *Un $A-$modulo è Noetheriano se e soltanto se ogni suo sottomodulo è finitamente generato.*

Un anello A è il più semplice esempio di $A-$modulo (il prodotto esterno è precisamente il prodotto).
Diremo che un anello A è Noetheriano se tale risulta come $A-$modulo.
Osservando che gli ideali di A sono tutti e soli i sottomoduli di A, si ha subito la seguente

3.10 Proposizione. *Un anello è Noetheriano se e soltanto se ogni suo ideale è finitamente generato.*

Come premesso, con il prossimo risultato stabiliamo una importante relazione fra la struttura algebrica di un anello A (in particolare dei dei suoi ideali) e la struttura topologica del suo spettro primo.

3.11 Teorema. *Se A è un anello Noetheriano allora* $\mathrm{Spec}(A)$ *è uno spazio topologico Noetheriano.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $X = \mathrm{Spec}(A)$. Alla luce di (3.5), sarà sufficiente far vedere che che ogni aperto di X è compatto. Sia Ω un aperto di X, ovvero esiste un sottoinsieme E di A tale che $\Omega = X \backslash V(E)$. Se $\mathfrak{I}$ è l'ideale generato da E, stante (1.2), deve aversi $\Omega = X \backslash V(\mathfrak{I})$. Siccome A è Noetheriano, allora $\mathfrak{I}$ deve risultare finitamente generato, e quindi sia $\{f_1, f_2, \ldots, f_r\}$ un sistema di generatori di $\mathfrak{I}$. Se $\mathfrak{p}$ è un ideale di A, allora $\mathfrak{p}$ contiene $\mathfrak{I}$ se e solo se $\mathfrak{p}$ contiene tutti i generatori di $\mathfrak{I}$. Allora

$$V(\mathfrak{I}) = \bigcap_{h=1}^{r} V(f_h),$$

da cui si ha subito

$$\Omega = X \backslash V(\mathfrak{I}) = X \backslash \left[\bigcap_{h=1}^{r} V(f_h)\right] = \bigcup_{h=1}^{r} [X \backslash V(f_h)] = \bigcup_{h=1}^{r} X_{f_h}.$$

Si ha pertanto che Ω è unione finita di aperti principali e quindi, per (2.13), è compatto. Segue subito l'asserto. $\square$

Mostriamo adesso che il precedente risultato non può essere invertito, ovvero esistono anelli non Noetheriani il cui spettro primo è uno spazio topologico Noetheriano.

3.12 Esempio. Siano K un campo, $\mathbf{X} := \{X_n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ una collezione infinita numerabile di indeterminate su K. Detto $\mathfrak{a}$ l'ideale di $K[\mathbf{X}]$ generato dall'insieme $\{X_n^2 : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$, allora è facile rendersi conto che l'anello $B := K[\mathbf{X}]/\mathfrak{a}$ non è Noetheriano. Infatti, se, per ogni $n \in \mathbb{N}$, x_n è l'immagine canonica di X_n in B, allora

$$(x_1) \subset (x_1, x_2) \subset \ldots (x_1, \ldots, x_n) \subset \ldots$$

è una successione strettamente crescente di ideali di B. Sia adesso $\mathfrak{b}$ l'ideale di B generato dall'insieme $\{x_n : n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}\}$. Per costruzione, risulta $x_n^2 = 0$, per ogni $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$, e quindi $\mathfrak{b} \subseteq \mathrm{Nilp}(B)$. D'altra parte, si ha $(B/\mathfrak{b}) \cong K$, come si vede immediatamente, e quindi si ha $\mathfrak{b} = \mathrm{Nilp}(B)$, essendo $\mathfrak{b}$ un ideale massimale di B. Dunque $\mathrm{Spec}(B) \cong \mathrm{Spec}(B/\mathrm{Nilp}(B)) \cong \mathrm{Spec}(K)$, in virtù di (1.16). Questo prova che $\mathrm{Spec}(B)$ è uno spazio topologico Noetheriano, essendo costituito da un punto.

3.3 Anelli con spettro Noetheriano: come si caratterizzano?

Come si è visto in (3.12), la Noetherianità di un anello è una condizione più forte della Noetherianità del suo spettro primo, che in questa sezione caratterizzeremo. Cominciamo mostrando la seguente condizione necessaria.

3.13 Proposizione. *Sia A un anello tale che* $\mathrm{Spec}(A)$ *è uno spazio topologico Noetheriano. Allora A soddisfa la condizione della catena ascendente per gli ideali primi.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\{\mathfrak{p}_n : n \in \mathbb{N}\}$ una successione non decrescente di ideali primi. Allora $\{V(\mathfrak{p}_n) : n \in \mathbb{N}\}$ è una successione non crescente di chiusi in $\mathrm{Spec}(A)$, e quindi è stabile, per ipotesi. Dunque esiste un intero $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $V(\mathfrak{p}_n) = V(\mathfrak{p}_\nu)$, per ogni $n \geq \nu$. Segue immediatamente che $\mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}_\nu$, per ogni $n \geq \nu$. □

La condizione della catena ascendente per gli ideali primi di un anello non è tuttavia sufficiente per la Noetherianità del suo spettro primo, come il seguente esempio mostrerà.

3.14 Esempio. Siano $\mathbb{F}_2$ il campo con due elementi e A l'insieme delle funzioni $f : \mathbb{N} \to \mathbb{F}_2$, che è un anello con le operazioni indotte da quelle di $\mathbb{F}_2$ (ovvero $(f+g)(n) := f(n) + g(n)$ e $(fg)(n) := f(n)g(n)$, per ogni $f, g \in A$, $n \in \mathbb{N}$). Si vede subito che A è un anello booleano, e quindi ogni suo ideale primo è massimale, in virtù di (2.41). Dunque A soddisfa la condizione della catena ascendente per gli ideali primi. Vogliamo mostrare che $\mathrm{Spec}(A)$ non è uno spazio topologico Noetheriano. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ consideriamo l'ideale

$$\mathfrak{a}_n := \{f \in A : f(m) = 0 \text{ per ogni } m \geq n\}$$

di A. Allora $\{\mathfrak{a}_n : n \in \mathbb{N}\}$ è una successione crescente di ideali di A, e quindi risulta $V(\mathfrak{a}_n) \subseteq V(\mathfrak{a}_m)$, per ogni $m \leq n$. Basterà mostrare che la successione di chiusi $\{V(\mathfrak{a}_n) : n \in \mathbb{N}\}$ è strettamente decrescente. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ poniamo $\mathfrak{p}_n := \{f \in A : f(n) = 0\}$. Allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{p}_n$ è un ideale primo (e massimale) di A, in quanto è il nucleo dell'omomorfismo di anelli surgettivo $\phi_n : A \to \mathbb{F}_2$ definito ponendo $\phi_n(f) = f(n)$, per ogni $f \in A$. Per concludere, basta osservare che $\mathfrak{a}_n \subseteq \mathfrak{p}_n$ ma $\mathfrak{a}_{n+1} \nsubseteq \mathfrak{p}_n$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ (infatti, per ogni $n \in \mathbb{N}$, la funzione $f_n \in A$ definita ponendo $f_n(m) = 1$, se $m = n$, $f_n(m) = 0$ altrimenti, appartiene a $\mathfrak{a}_n \setminus \mathfrak{p}_n$). Si osservi che l'insieme $V(\mathfrak{a}_n)$ è infinito, per ogni $n \in \mathbb{N}$, contenendo l'insieme $\{\mathfrak{p}_m : m \geq n\}$. Inoltre tutti gli elementi di $V(\mathfrak{a}_n)$ sono minimali. Pertanto ciascuno dei chiusi $V(\mathfrak{a}_n)$ ha una collezione infinita di componenti irriducibili.

Vedremo fra poco che la mancata Noetherianità dello spettro primo dell'anello del precedente esempio è dovuta al fatto che ci sono chiusi con un numero infinito di componenti irriducibili. Cominciamo con una osservazione elementare, la cui verifica viene lasciata al lettore.

3.15 Osservazione. Siano X un insieme e $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ una successione decresente di sottoinsiemi di X non stabile. Se F_1 è unione degli insiemi $Z_1, \ldots, Z_r$, allora almeno una delle successioni non crescenti $\mathcal{F}_i := \{Z_i \cap F_n : n \in \mathbb{N}\}$ non è stabile.

Il seguente risultato sarà cruciale ai nostri fini.

3.16 Teorema. *Sia X uno spazio topologico. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti.*

(i) *X è Noetheriano.*

(ii) *X soddisfa la condizione della catena discendente per i chiusi irriducibili e ogni chiuso di X ha un numero finito di componenti irriducibili.*

DIMOSTRAZIONE. (i)$\Rightarrow$(ii). La prima parte dell'asserzione (ii) è ovvia. La seconda parte segue immediatamente da (3.3) e (3.7).
(ii)$\Rightarrow$(i). Supponiamo, per assurdo, che X non sia uno spazio topologico Noetheriano, e fissiamo una successione decrescente $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ di chiusi di X che non è stabile. Poiché le componenti irriducibili di F_1 sono in numero finito e ricoprono F_1 (per (2.32)), possiamo applicare (3.15), e quindi esiste una componente irriducibile Z_1 di F_1 tale che la successione $\mathcal{S}_1 := \{Z_1 \cap F_m : m \geq 1\}$ non è stabile. Per concludere la dimostrazione, basterà costruire una successione decrescente di chiusi irriducibili non stabile. Il primo termine sia Z_1. Poiché la successione $\mathcal{S}_1$ non è stabile, esiste un n_1 tale che $Z_1 = Z_1 \cap F_1 \supsetneq Z_1 \cap F_{n_1}$, e inoltre la successione $\mathcal{S}_1' := \{Z_1 \cap F_n : n \geq n_1\}$ non è stabile. Possiamo applicare (3.15) alla successione $\mathcal{S}_1'$, e quindi esiste una componente irriducibile Z_2 del chiuso $Z_1 \cap F_{n_1}$ tale che la successione $\mathcal{S}_2 := \{Z_1 \cap Z_2 \cap F_n : n \geq n_1\}$ non è stabile. Si ha $Z_2 \subseteq Z_1 \cap F_{n_1} \subsetneq Z_1$. Procedendo per induzione, si costruisce una successione decrescente non stabile di chiusi irriducibili $Z_1 \supsetneq Z_2 \supsetneq \ldots$. □

Abbiamo adesso una prima caratterizzazione della Noetherianità dello spettro primo di un anello.

3.17 Corollario. *Sia A un anello. Allora* $\mathrm{Spec}(A)$ *è Noetheriano se e soltanto se A soddisfa la condizione della catena ascendente per gli ideali primi e ogni ideale di A ha un numero finito di primi minimali.*

DIMOSTRAZIONE. Se A soddisfa la condizione della catena ascendente per gli ideali primi, allora $\mathrm{Spec}(A)$ soddisfa la condizione della catena discendente per i chiusi irriducibili. A questo punto, l'asserzione è una conseguenza immediata di (2.36), (3.16) e (3.13). □

3.18 Teorema. *Sia A un anello. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti.*

(i) $\mathrm{Spec}(A)$ *è uno spazio topologico Noetheriano.*

(ii) *A soddisfa la condizione della catena ascendente per gli ideali radicali.*

(iii) *A soddisfa la condizione della catena ascendente per gli ideali primi e ogni ideale di A ha un numero finito di primi minimali.*

(iv) *Per ogni ideale $\mathfrak{a}$ di A esiste un ideale finitamente generato $\mathfrak{b}_\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}$ tale che* $\mathrm{rad}(\mathfrak{a}) = \mathrm{rad}(\mathfrak{b}_\mathfrak{a})$.

(v) *Ogni ideale primo di A è il radicale di un ideale finitamente generato.*

DIMOSTRAZIONE. (i)$\Rightarrow$(ii). Sia $\{\mathfrak{a}_n : n \in \mathbb{N}\}$ una successione non decrescente di ideali radicali. Allora, per la Noetherianità di $X := \mathrm{Spec}(A)$, esiste un intero $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $V(\mathfrak{a}_n) = V(\mathfrak{a}_\nu)$, per ogni $n \geq \nu$. Si ha immediatamente, $\mathfrak{a}_n = \mathfrak{a}_\nu$, per ogni $n \geq \nu$, in virtù di (1.15).
(ii)$\Rightarrow$(i). Segue immediatamente tenendo presente che $V(\mathfrak{a}) = V(\mathrm{rad}(\mathfrak{a}))$, per ogni ideale $\mathfrak{a}$

di A.
(i)$\Rightarrow$(ii). Sia $\mathfrak{a}$ un ideale di A. In virtù di (3.5), l'aperto $X \setminus V(\mathfrak{a})$ è compatto, e quindi esso è unione finita di aperti principali, stante (2.13). Equivalentemente, esistono $f_1, \ldots, f_n \in A$ tali che $V(\mathfrak{a}) = \bigcap\{V(f_i) : i = 1, \ldots, n\} = V(f_1, \ldots, f_n)$, e tali elementi $f_1, \ldots, f_n$ si possono scegliere in $\mathfrak{a}$, per (1.5). Segue immediatamente $\mathrm{rad}(\mathfrak{a}) = \mathrm{rad}((f_1, \ldots, f_n))$, per (1.15).
(ii)$\Rightarrow$(i). Sia U un aperto di X. Per (3.5), sarà sufficiente dimostrare che U è compatto. Detto $\mathfrak{a}$ un ideale di A tale che $U = \mathrm{Spec}(A) \setminus V(\mathfrak{a})$, fissiamo elementi $f_1, \ldots, f_n \in \mathfrak{a}$ tali che $\mathrm{rad}(\mathfrak{a}) = \mathrm{rad}((f_1, \ldots, f_n))$. Segue immediatamente che U è unione finita degli aperti principali X_{f_i} $(i = 1, \ldots, n)$, e quindi è compatto, per (2.13).
L'equivalenza di (i) e (iii) è stata mostrata in (3.17), e (iv)$\Rightarrow$(v) è banale. Dunque, basta mostrare che (v)$\Rightarrow$(iv). Sia Σ l'insieme degli ideali $\mathfrak{a}$ di A tali che $\mathrm{rad}(\mathfrak{b}) \subsetneq \mathrm{rad}(\mathfrak{a})$, per ogni ideale finitamente generato $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$, e assumiamo, per assurdo, che Σ sia non vuoto. Muniamo Σ dell'ordine dell'inclusione, fissiamo una catena $\mathcal{F} \subseteq \Sigma$, e sia $\mathfrak{c}$ l'unione dei membri di $\mathcal{F}$ ($\mathfrak{c}$ è un ideale!). Fissato ad arbitrio un ideale finitamente generato $\mathfrak{b}$ contenuto in $\mathfrak{c}$, esiste un ideale $\mathfrak{f} \in \mathcal{F}$ tale che $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{f}$, essendo $\mathcal{F}$ una catena. Dunque $\mathrm{rad}(\mathfrak{b}) \subsetneq \mathrm{rad}(\mathfrak{f}) \subseteq \mathfrak{c}$. Questo mostra che $\mathfrak{c} \in \Sigma$, e quindi è un maggiorante per $\mathcal{F}$. Per il Lemma di Zorn, Σ ha almeno un elemento massimale $\mathfrak{q}$, che non può essere primo, per ipotesi, e deve inoltre essere distinto da A. Dunque, esistono $x, y \in A \setminus \mathfrak{q}$ tali che $xy \in \mathfrak{q}$. Per la massimalità di $\mathfrak{q}$ in Σ, gli ideali $\mathfrak{i}_x := \mathfrak{q} + (x), \mathfrak{i}_y := \mathfrak{q} + (y)$ non appartengono a Σ, e quindi esistono ideali finitamente generati $\mathfrak{a}_x, \mathfrak{a}_y$ contenuti in $\mathfrak{i}_x, \mathfrak{i}_y$, rispettivamente, tali che $\mathrm{rad}(\mathfrak{i}_x) = \mathrm{rad}(\mathfrak{a}_x)$ e $\mathrm{rad}(\mathfrak{i}_y) = \mathrm{rad}(\mathfrak{a}_y)$. Si ha, ovviamente, $\mathfrak{i}_x\mathfrak{i}_y \subseteq \mathfrak{q}$ e, in particolare, $\mathfrak{a}_x\mathfrak{a}_y \subseteq \mathfrak{q}$. Dunque, $\mathrm{rad}(\mathfrak{a}_x\mathfrak{a}_y) \subseteq \mathrm{rad}(\mathfrak{q})$. Dal fatto che $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{i}_x \cap \mathfrak{i}_y \subseteq \mathrm{rad}(\mathfrak{a}_x) \cap \mathrm{rad}(\mathfrak{a}_y) = \mathrm{rad}(\mathfrak{a}_x\mathfrak{a}_y)$, segue $\mathrm{rad}(\mathfrak{q}) = \mathrm{rad}(\mathfrak{a}_x\mathfrak{a}_y)$. L'ideale $\mathfrak{a}_x\mathfrak{a}_y$ è ovviamente finitamente generato, tali essendo $\mathfrak{a}_x, \mathfrak{a}_y$, e questa è una contraddizione, poiché $\mathfrak{q} \in \Sigma$. Il teorema è completamente provato. $\square$

Capitolo 4

L'anello delle funzioni continue

Il problema di conoscere quali sono gli spazi topologici omeomorfi allo spettro primo di qualche anello è una questione assai complessa, risolta nel 1969 da M. Hochster [**Hoc**]. In particolare dimostra il seguente risultato.

4.1 Teorema. *Sia X uno spazio topologico. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti.*

(i) *X è omeomorfo allo spettro primo di un anello.*

(ii) *X soddisfa l'assioma T_0, è compatto, ha una base di aperti compatti chiusa per intersezioni finite, e ogni chiuso irridicibile di X è la chiusura di un singoletto.*

Dai risultati mostrati in precedenza, segue immediatamente che (i) implica (ii). Il viceversa è assai profondo, e richiede delle tecniche la cui trattazione non verrà esposta in quanto esulano dagli obiettivi di queste note.

Nello stesso lavoro, Hochster caratterizza gli spazi topologici omeomorfi allo spettro massimale di un anello, attraverso il seguente risultato, che non dimostriamo.

4.2 Teorema. *Sia X uno spazio topologico. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti*

(i) *X è omeomorfo allo spettro massimale di un anello.*

(ii) *X è compatto e soddisfa l'assioma T_1.*

Vogliamo invece far vedere che, se X è uno spazio compatto e di Hausdorff, allora un anello il cui spettro massimale è omeomorfo a X (tale anello esiste, per (4.2)), è l'anello $C(X)$ delle funzioni continue $X \longrightarrow \mathbb{R}$ (con $\mathbb{R}$ munito della topologia euclidea).

4.3 Osservazione. Sia X uno spazio topologico.

(i) Se $x \in X$, allora l'insieme

$$\mathfrak{m}_x := \{f \in C(X) : f(x) = 0\}$$

è un ideale massimale di $C(X)$. Infatti $\mathfrak{m}_x$ è il nucleo dell'omomorfismo surgettivo di anelli $v_x : C(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ definito da $v(f) := f(x)$, per ogni $f \in C(X)$.

(ii) Una funzione $f \in C(X)$ è invertibile se, e soltanto se $f(x) \neq 0$, per ogni $x \in X$. Infatti, se f non ha zeri, allora $1/f$ è una funzione continua ed è ovviamente l'inversa di f. Il viceversa è banale.

4.4 Proposizione. *Sia X uno spazio topologico compatto e $\mathfrak{a}$ un ideale proprio di $C(X)$. Allora esiste un punto $x \in X$ tale che $f(x) = 0$, per ogni $f \in \mathfrak{a}$.*

DIMOSTRAZIONE. Per assurdo, supponiamo che, per ogni $x \in X$, esista una funzione $f_x \in \mathfrak{a}$ tale che $f_x(x) \neq 0$, e poniamo $U_x := f_x^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. La famiglia di insiemi $\{U_x : x \in X\}$ è, ovviamente, un ricoprimento aperto di X e quindi, per ipotesi, esistono $x_1, \dots, x_n \in X$ tali che $\bigcup_{i=1}^n U_{x_i} = X$. Consideriamo adesso la funzione $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo $f(x) := \sum_{i=1}^n (f_{x_i}(x))^2$. Allora è chiaro che $f \in \mathfrak{a}$. Se $x \in X$, si ha, per qualche $i \in \{1, \dots, n\}$, si ha $x \in U_{x_i}$, e quindi $f(x) \geq (f_{x_i}(x))^2 > 0$. Segue immediatamente che f è invertibile in $C(X)$, stante (4.3)(i). Dunque $\mathfrak{a} = C(X)$, una contraddizione. □

Ricordiamo adesso che uno spazio topologico X si dice *normale* se per ogni coppia di chiusi disgiunti C, D di X, esiste una coppia di aperti disgiunti U, V di X tali che $C \subseteq U, D \subseteq V$. Come è ben noto, ogni spazio compatto e di Hausdorff è normale. La seguente caratterizzazione degli spazi normali sarà cruciale.

4.5 Teorema (Lemma di Urysohn). *Sia X uno spazio topologico. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti.*

(i) *X è normale*

(ii) *Se C, D sono chiusi disgiunti di X, esiste una funzione continua $f : X \longrightarrow [0, 1]$ tale che $f(C) = \{0\}$ e $f(D) = \{1\}$*

4.6 Proposizione. *Sia X uno spazio topologico normale e T_1 e, per ogni $f \in C(X)$, si consideri il sottoinsieme (aperto) $V_f := \{x \in X : f(x) \neq 0\}$ di X. Allora la collezione degli aperti non vuoti del tipo V_f ($f \in C(X)$) è una base di X.*

DIMOSTRAZIONE. Sia U un aperto di X e $x \in U$. Poiché X è T_1, $\{x\}$ è chiuso e, per normalità, esistono aperti disgiunti Ω, Ω' di X tali che $x \in \Omega$ e $X \setminus U \subseteq \Omega'$. In particolare, segue

$$\overline{\Omega} \subseteq \overline{X \setminus \Omega'} = X \setminus \Omega' \subseteq U.$$

Segue che $\overline{\Omega}$ e $X \setminus U$ sono chiusi disgiunti e quindi, per il Lemma di Urysohn, esiste una funzione continua $f : X \longrightarrow [0, 1]$ tale che $f(\overline{\Omega}) = \{1\}$ e $f(X \setminus U) = \{0\}$. Segue immediatamente $x \in V_f \subseteq U$. Questo conclude la dimostrazione. □

Adesso mostriamo quanto abbiamo annunciato all'inizio della sezione.

4.7 Teorema. *Sia X uno spazio topologico compatto e di Hausdorff. Allora la funzione*

$$\phi : X \longrightarrow \mathrm{Max}(C(X)), \quad x \mapsto \mathfrak{m}_x := \{f \in C(X) : f(x) = 0\},$$

è un omeomorfismo ($\mathrm{Max}(C(X))$ *è munito della topologia di sottospazio, indotta dalla topologia di Zariski di* $\mathrm{Spec}(C(X))$*).*

DIMOSTRAZIONE. Stante (4.3(i)), ϕ è ben definita. Sia $\mathfrak{m}$ un ideale massimale di $C(X)$. Per (4.4), esiste un punto $x_0 \in X$ tale che $f(x_0) = 0$, per ogni $f \in \mathfrak{m}$. Questo mostra che $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}_{x_0}$, e quindi vale l'uguaglianza, per la massimalità di $\mathfrak{m}$. Dunque ϕ è surgettiva. Siano x, y punti distinti di X. Siccome X è, in particolare, di Hausdorff, $\{x\}, \{y\}$ sono chiusi (disgiunti) e, per il Lemma di Urysohn, esiste una funzione $f \in C(X)$ tale che $f(x) = 0$ e $f(y) = 1$. Dunque $f \in \mathfrak{m}_x \setminus \mathfrak{m}_y$. Questo mostra che ϕ è bigettiva. Inoltre, stante (1.5), segue immediatamente che gli insiemi $\widetilde{V_f} := \{\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(C(X)) : f \notin \mathfrak{m}\}$ costituiscono una base di $\mathrm{Max}(C(X))$. Infine, preservando le notazioni di (4.6), si ha $\phi(V_f) = \widetilde{V_f}$. Infatti, per ogni $x \in X$, si ha

$$\mathfrak{m}_x \in \phi(V_f) \Longleftrightarrow x \in V_f \Longleftrightarrow f(x) \neq 0 \Longleftrightarrow \mathfrak{m}_x \in \widetilde{V_f}.$$

Da (4.6) e dal fatto che ϕ è bigettiva segue che ϕ è continua e aperta, e quindi è un omeomorfismo. $\square$.

Bibliografia

[**Hoc**] M. Hochster, Prime ideal structure in commutative rings, *Trans. Amer. Math. Soc.* 142 (1969), 43-60.