UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI
ROMA TRE

CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN
MATEMATICA

A.A. 2014-2015

Tesi di Laurea

Sistemi Localizzanti e Operazioni Semistar

Relatore

Marina Mastrostefano

Prof. Marco Fontana

17 Marzo 2016

Se l'uomo non sapesse di Matematica non si eleverebbe di un sol palmo da terra.

(Galileo Galilei)

Indice

Introduzione

Lo studio delle operazioni star nasce nella prima metà del XX secolo dall'esigenza di estendere la teoria classica di Kronecker. Infatti uno dei maggiori problemi per generalizzare questa teoria è dato dal fatto che il Lemma di Gauss per il contenuto di polinomi (l'ideale generato dai coefficienti del polinomio) vale per domini di Dedekind (o, più in generale, per i domini di Prüfer), ma non in generale. Infatti vale sempre l'inclusione $c(fg) \subseteq c(f)c(g)$, ma non l'uguaglianza (come nel lemma di Gauss). Al fine di superare questo problema, Krull introdusse sistemi moltiplicativi di ideali aventi la proprietà del Lemma di Gauss. Questi sistemi di ideali possono essere definiti da quelle che oggi chiamiamo operazioni star e.a.b.

Krull introdusse il concetto di operazione star nel suo lavoro *Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche* [12], nel 1936. Chiamava queste applicazioni "Operazioni $'$ " ("Strich-Operations"). L'attuale notazione "Operazioni $\star$" nasce dalla Sezione 26 della versione originale di "*Multiplicative Ideal Theory*" di Gilmer [9] (1968).

Inoltre Krull considerò solo il concetto di "operazione $'$ a.b."; il concetto di operazione e.a.b. deriva dalla versione originale del libro di Gilmer [9] del 1968. I risultati della Sezione 26 mostrano che questa nozione più debole è tutto ciò che serve per sviluppare una teoria completa degli anelli di funzioni di Kronecker.

Uno dei principali risultati per la teoria classica delle operazioni star è stato quello raggiunto da Krull nel 1936 [12], che, usando le operazioni star, definì un anello di funzioni di Kronecker in un contesto più generale di quello considerato originariamente da Kronecker nel 1882.

Nel 1994, Okabe e Matsuda introdussero il concetto di "operazione semistar" per estendere la nozione classica di operazione star e renderla più flessibile. Le operazioni star si sono dimostrate uno strumento essenziale nella teoria moltiplicativa degli ideali, permettendo di studiare diverse classi di domini d'integrità. Le operazioni semistar, proprio grazie ad una maggiore flessibilità, permettono uno studio più fine e una classificazione di varie classi di domini d'integrità.

A seguito dell'introduzione delle operazioni semistar diversi autori hanno lavorato su questo tema, estendendo alle operazioni semistar i risultati e le nozioni precedentemente studiati nel contesto delle operazioni star.

In questo lavoro di tesi abbiamo riportato alcuni risultati riguardanti le proprietà delle operazioni semistar, i legami che intercorrono tra operazioni semistar e i sistemi localizzanti e le relazioni tra alcuni insiemi di operazioni semistar e gli spazi topologici, provenienti dallo studio degli articoli scientifici [7] e [4].

Capitolo 0

Nozioni Preliminari

0.1 Moduli

Definizione 0.1.1. Sia R un anello. Un *R-modulo sinistro* M è un gruppo abeliano $(M, +)$ su cui è definita un'operazione $R \times M \to M$ tale che:

1. $a(v + w) = av + aw$, $\forall a \in R \; \forall v, w \in M$;

2. $(a + b)v = av + bv$, $\forall a, b \in R \; \forall v \in M$;

3. $(ab)v = a(bv)$, $\forall a, b \in R \; \forall v \in M$.

Analogamente, un *R-modulo destro* è un M su cui è definita un'operazione $M \times R \to M$ su cui valgono analoghi assiomi, opportunamente sistemati.

Se M è contemporaneamente un R-modulo destro e sinistro, e se le due moltiplicazioni sono compatibili (ovvero se vale $(av)b = a(vb)$, $\forall a, b \in R \; \forall v \in M$) allora M è detto *modulo bilatero*.

Esempio 0.1.2.

1. Un ideale sinistro di un anello R è naturalmente un R-modulo sinistro, e, analogamente, un ideale destro è un R-modulo destro;

2. Quando l'anello R è un campo, un R-modulo (bilatero grazie alla commutatività dei campi) risulta essere uno spazio vettoriale.

3. Un gruppo abeliano può essere considerato come modulo sull'anello degli interi, cioè come $\mathbb{Z}$-modulo, definendo nx come la somma di n

"repliche" dell'elemento x per ogni x elemento del gruppo e per ogni n intero;

Nel seguito ci limiteremo a considerare il caso in cui R è un anello commutativo e gli R-moduli sono moduli bilateri.

Definizione 0.1.3. Siano M, N R-moduli. Un'applicazione $f : M \to N$ è un *omomorfismo di R-moduli* (o *R-lineare*) se

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$
$$f(ax) = a \cdot f(x)$$

per ogni $a \in R$ e per ogni $x, y \in M$

Osservazione 0.1.4.

1. La composizione di omomorfismi di R-moduli è ancora un omomorfismo di R-moduli.

2. Si verifica facilmente che l'insieme di tutti gli omomorfismi di R-moduli da M in N è un R-modulo se definiamo $f + g$ e af come segue:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$
$$(af)(x) = a \cdot f(x)$$

per ogni $x \in M$. Denotiamo questo R-modulo $Hom_R(M, N)$

3. Gli omomorfismi $u : M' \to M$ e $v : N \to N''$ inducono le applicazioni $\overline{u} : Hom(M, N) \to Hom(M', N)$ e $\overline{v} : Hom(M, N) \to Hom(M, N'')$ definiti come segue:

$$\overline{u}(f) = f \circ u,$$
$$\overline{v}(f) = v \circ f.$$

Queste applicazioni sono omomorfismi di R-moduli.

4. Per ogni modulo M c'è un isomorfismo naturale $Hom(R, M) \cong M$: ogni omomorfismo di R-moduli $f : R \to M$ è univocamente determinato da $f(1)$, che può essere qualunque elemento di M.

Definizione 0.1.5. Un *sottomodulo* di M è un sottoinsieme N che è esso stesso un R-modulo (con le stesse operazioni di M).

Definizione 0.1.6. Dato un modulo M e un suo sottomodulo N, il loro *quoziente* come moduli M/N coincide con il loro quoziente come gruppi abeliani.

Osservazione 0.1.7. L'insieme M/N eredita, inoltre, una struttura di R-modulo. In particolare, poiché gli ideali (bilateri) I di R sono R-moduli, anche i quozienti (come anello) R/I sono R-moduli.

Definizione 0.1.8. Se $f : M \to N$ è un omomorfismo di R-moduli, il *nucleo* di f è l'insieme

$$Ker(f) = \{x \in M : f(x) = 0\}$$

ed è un sottomodulo di M. L'*immagine* di f è l'insieme

$$Im(f) = f(M)$$

ed è un sottomodulo di N. Il *conucleo* di f è

$$Coker(f) = N/Im(f)$$

che è un modulo quoziente di N.

Osservazione 0.1.9. Se M' è un sottomodulo di M tale che $M' \subseteq Ker(f)$, allora f dà origine ad un omomorfismo $\tilde{f} : M/M' \to N$, definito come segue: se $\overline{x} \in M/M'$ è l'immagine di $x \in M$, allora $\tilde{f}(\overline{x}) = f(x)$. Il nucleo di $\tilde{f}$ è $Ker(f)/M'$. L'omomorfismo $\tilde{f}$ si dice *indotto* da f. In particolare, prendendo $M' = Ker(f)$, abbiamo un isomorfismo di R-moduli

$$M/Ker(f) \cong Im(f).$$

Osservazione 0.1.10.

1. Sia M un R-modulo e sia $(M_i)_{i\in I}$ una famiglia di sottomoduli di M. La loro *somma* $\sum M_i$ è l'insieme di tutte le somme (finite) $\sum x_i$, dove $x_i \in M_i, \forall i \in I$, e quasi ogni x_i (tutte tranne un numero finito), sono nulle. $\sum M_i$ è il più piccolo sottomodulo di M che contiene tutti gli M_i.

2. L'intersezione $\bigcap M_i$ è ancora un sottomodulo di M. Quindi i sottomoduli di M formano un reticolo completo rispetto all'inclusione.

Proposizione 0.1.11. *[2, Proposizione 2.1]*

1. *Se $L \supseteq M \supseteq N$ sono R-moduli, allora*

$$(L/N)/(M/N) \cong L/M.$$

2. *Se M_1, M_2 sono sottomoduli di M, allora*

$$(M_1 + M_2)/M_1 \cong M_2/(M_1 \cap M_2).$$

Osservazione 0.1.12. In generale non è possibile definire il *prodotto* di due sottomoduli, ma possiamo definire il prodotto IM, dove I è un ideale e M un R-modulo; è l'insieme di tutte le somme finite $\sum a_i x_i$, con $a_i \in I, x_i \in M$, ed è un sottomodulo di M.

Definizione 0.1.13. Se N, P sono sottomoduli di M, definiamo $(N : P)$ come l'insieme di tutti gli $a \in R$ tale che $aP \subseteq N$; è un ideale di R. In particolare $(0 : M)$ è l'insieme di tutti gli $a \in R$ tale che $aM = 0$; questo ideale è chiamato *annullatore* di M e si denota con $Ann(M)$.

Esempio 0.1.14. 1. $Ann(M + N) = Ann(M) \cap Ann(N)$;

2. $(N : P) = Ann((N + P)/N)$.

Definizione 0.1.15. Se x è un elemento di M, l'insieme di tutti i multipli $ax (a \in R)$ è un sottomodulo di M, denotato da Rx o (x). Se $M = \sum_{i \in I} Rx_i$, gli x_i formano l'insieme dei *generatori* di M; questo vuol dire che ogni elemento di M può essere espresso (non in maniera univoca) come una combinazione lineare finita degli x_i con coefficienti in R. Un R-modulo si dice *finitamente generato* se ha un insieme finito di generatori.

Definizione 0.1.16. Se M, N sono R-moduli, la loro *somma diretta* $M \oplus N$ è l'insieme di tutte le coppie (x, y) con $x \in M, y \in N$. È un R-modulo se definiamo l'addizione e il prodotto per uno scalare nella maniera più immediata:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$
$$a(x, y) = (ax, ay).$$

Più in generale, se $(M_i)_{i \in I}$ è una famiglia di R-moduli, possiamo definire la loro *somma diretta* $\oplus_{i \in I} M_i$; i suoi elementi sono le famiglie $(x_i)_{i \in I}$ tali che $x_i \in M_i$ per ogni $i \in I$ e quasi tutti gli x_i sono nulli. Se lasciamo cadere la limitazione del numero degli x non nulli, otteniamo il *prodotto diretto* $\prod_{i \in I} M_i$.

Proposizione 0.1.17. *[2, Proposizione 2.12] Siano M, N R-moduli. Allora esiste una coppia (T, g) formata da un R-modulo T ed un'applicazione R-bilineare $g : M \times N \to T$ con la seguente proprietà:*
Dati un qualunque R-modulo P ed una qualunque applicazione R-bilineare $f : M \times N \to P$, esiste un'unica applicazione R-lineare $f' : T \to P$ tale che $f = f' \circ g$

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f"'] & T \arrow[d, dotted, "f'"] \\ & P \end{tikzcd}$$

Definizione 0.1.18. Il modulo T della proposizione precedente è chiamato *prodotto tensoriale di M e N* e si denota con $M \otimes_R N$ (o solo $M \otimes N$ se non ci sono ambiguità).

Osservazione 0.1.19. Il prodotto tensoriale $M \otimes N$ è generato come R-modulo dai "prodotti" $x \otimes y$. Se $(x_i)_{i \in I}, (y_j)_{j \in J}$ sono famiglie di generatori rispettivamente di M e N. Allora gli elementi $x_i \otimes y_j$ generano $M \otimes N$. In particolare, se M e N sono finitamente generati, lo è anche $M \otimes N$.

Esempio 0.1.20. La notazione $x \otimes y$ è intrinsecamente ambigua, a meno che non specifichiamo a quale prodotto tensoriale appartiene. Siano M', N' sottomoduli di M e N rispettivamente, e sia $x \in M'$ e $y \in N'$. Può accadere che $x \otimes y$ come elemento di $M \otimes N$ sia nullo, mentre $x \otimes y$ come elemento di $M' \otimes N'$ non lo sia. Ad esempio sia $R = \mathbb{Z}, M = \mathbb{Z}, N = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ e siano M' il sottomodulo $2\mathbb{Z}$ di $\mathbb{Z}$, mentre $N' = N$. Sia x un elemento non nullo di N e consideriamo $2 \otimes x$. Come elemento di $M \otimes N$ è nullo, poiché $2 \otimes x = 1 \otimes 2x = 1 \otimes 0 = 0$. Ma come elemento di $M' \otimes N'$ è non nullo.

Definizione 0.1.21. Una successione di R-moduli e R-omomorfismi

$$\cdots \longrightarrow M_{t-1} \xrightarrow{f_t} M_t \xrightarrow{f_{t+1}} M_{t+1} \longrightarrow \cdots$$

si dice *esatta* se per ogni t, $Im(f_t) = Ker(f_{t+1})$.
Se f e g sono R-omomorfismi e f è iniettivo e g è suriettivo, la successione esatta

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

è detta *successione esatta corta.*
Se invece la successione esatta è infinita è detta *lunga.*

Osservazione 0.1.22. In particolare:

1. la successione $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M$ è esatta $\Leftrightarrow$ f è iniettiva;

2. la successione $M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ è esatta $\Leftrightarrow$ g è suriettiva;

Esempio 0.1.23. Sia $R = \mathbb{Z}$ e consideriamo la successione esatta

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z}$$

dove $f(x) = 2x \ \forall x \in \mathbb{Z}$. Se tensorizziamo con $N = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, la successione

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \otimes N \xrightarrow{f \otimes 1} \mathbb{Z} \otimes N$$

non è esatta, perchè $\forall x \otimes y \in \mathbb{Z}$ abbiamo

$$(f \otimes 1)(x \otimes y) = 2x \otimes y = x \otimes 2y = x \otimes 0 = 0,$$

ossia $f \otimes 1$ è l'applicazione nulla, mentre $\mathbb{Z} \otimes N \neq 0$.

Definizione 0.1.24. Un modulo *piatto* è un modulo che "si comporta bene" rispetto al prodotto tensoriale; più precisamente, dato un anello R, un R-modulo sinistro M è piatto se per ogni successione esatta di R-moduli

$$\cdots \longrightarrow N_{i-1} \longrightarrow N_i \longrightarrow N_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

la successione

$$\cdots \longrightarrow N_{i-1} \otimes M \longrightarrow N_i \otimes M \longrightarrow N_{i+1} \otimes M \longrightarrow \cdots$$

(dove le mappe della seconda successione sono ottenute da quelle della prima tensorizzando con l'identità su M) è ancora esatta; analogamente, un modulo destro M è piatto se è esatta la successione

$$\cdots \longrightarrow M \otimes N_{i-1} \longrightarrow M \otimes N_i \longrightarrow M \otimes N_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

Su anelli commutativi, le nozioni di modulo sinistro piatto e modulo destro piatto coincidono.

Proposizione 0.1.25. *(cf. [2, Proposizione 2.19]) Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) *N è piatto;*

(ii) *Se la successione di R-moduli*

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

è una successione esatta, allora la successione tensorizzata

$$0 \longrightarrow M' \otimes N \longrightarrow M \otimes N \longrightarrow M'' \otimes N \longrightarrow 0$$

è esatta;

(iii) *Se $f : M' \to M$ è iniettiva, allora $f \otimes 1 : M' \otimes N \to M \otimes N$ è iniettiva;*

(iv) *Se $f : M' \to M$ è iniettiva e M, M' sono finitamente generati, allora $f \otimes 1 : M' \otimes N \to M \otimes N$ è iniettiva;*

Proprietà 0.1.26. 1. Il prodotto tensoriale di due moduli piatti è ancora piatto;

2. La somma diretta dei moduli M_i è piatta se e solo se lo è ogni M_i;

0.2 Ideali Frazionari

Definizione 0.2.1. Sia R un dominio d'integrità con campo dei quozienti K. Un *ideale frazionario* I di R è un R-sottomodulo di K per cui esiste un elemento non nullo $d \in R$ con $dI \subseteq R$.
Denotiamo con $\mathbf{F}(R)$ l'insieme degli ideali frazionari non nulli di R.

Esempio 0.2.2. 1. In particolare ogni ideale "ordinario" di R (che da ora in poi chiameremo *ideale intero* di R) è un ideale frazionario di R (basta prendere $d = 1$);

2. Ogni elemento u di K genera l'ideale frazionario Ru, detto *principale*;

3. Ogni R-sottomodulo M di K finitamente genarato è un ideale frazionario (perchè se M è generato da $x_1, \ldots, x_n \in K$, possiamo scrivere $x_i = y_i z^{-1}$, con y_i e z elementi di R e $zM \subseteq R$).

Osservazione 0.2.3. Si vede facilmente che $\mathbf{F}(R)$ è chiuso rispetto a somma, prodotto, intersezione e quoziente.

Definizione 0.2.4. Se $I \in \mathbf{F}(R)$ allora denotiamo con $(R : I)$ l'insieme di tutti gli $z \in K$ tali che $zI \subseteq R$.

Definizione 0.2.5. Un ideale frazionario $I \in \mathbf{F}(R)$ è *invertibile* se esiste $I' \in \mathbf{F}(R)$ tale che $II' = R$.

Osservazione 0.2.6. L'inverso I' è unico ed è uguale a $(R : I)$; infatti abbiamo che $I' \subseteq (R : I) = (R : I)II' \subseteq RI' = I'$.

Definizione 0.2.7. Un dominio d'integrità R si dice *di Dedekind* se ogni suo ideale non nullo è fattorizzabile in ideali primi.

Proposizione 0.2.8. *[2, Teorema 9.8] Sia R un dominio d'integrità. Allora R è un dominio di Dedekind $\Leftrightarrow$ ogni ideale frazionario non nullo di R è invertibile.*

Osservazione 0.2.9. Conseguenza del precedente enunciato è che se R è un dominio di Dedekind, gli ideali frazionari non nulli di R formano un gruppo moltiplicativo.

0.3 Richiami di Topologia

Definizione 0.3.1. Si definisce *topologia* una collezione T di sottoinsiemi di un insieme X tali che:

- $\emptyset \in T$ e $X \in T$
- $\forall \{Z_i\}_{i \in I} \subseteq T$, $\bigcup_{i \in I} Y_i \in T$
- $\forall Z_1, \ldots, Z_n \in T$, $Z_1 \bigcap \ldots \bigcap Z_n \in T$

Uno *spazio topologico* è una coppia (X, T), dove X è un insieme e T una topologia. In uno spazio topologico gli insiemi che costituiscono T si dicono *aperti* in X. I complementari degli insiemi aperti sono detti *chiusi*.

Esempio 0.3.2. Un insieme fissato X, non vuoto, ammette in generale numerose topologie T differenti, ad esempio:

1. $T = \{\emptyset, X\}$, detta *topologia banale*
2. $T = P(X)$, detta *topologia discreta*
3. $T = \{U : T \setminus U$ è finito o $U = X\}$, detta *topologia cofinita*

Definizione 0.3.3. Dato un anello R si dice *topologia di Zariski* la topologia i cui chiusi sono gli insiemi del tipo:

$$V(E) = \{P \in \mathrm{Spec}(R) : E \subseteq P\} \subseteq \mathrm{Spec}(R)$$

Definizione 0.3.4. Uno spazio T_0 (o di *Kolmogorov*) è uno spazio topologico che soddisfa il seguente assioma di separazione:

$$\forall x \neq y \text{ esiste } U \text{ aperto tale che } x \in U \text{ e } y \notin U$$

Definizione 0.3.5. Uno spazio T_1 è uno spazio topologico che soddisfa il seguente assioma di separazione:

$$\forall x, y \text{ esistono due aperti } U, V \text{ tali che } x \in U \text{ e } y \notin U \text{ e } y \in V \text{ e } x \notin V.$$

Definizione 0.3.6. Uno spazio topologico X è detto *spazio di Hausdorff* se soddisfa il seguente assioma di separazione:

$$\forall x, y \in X \text{ esistono degli intorni aperti } U, V \text{ di } x, y, \text{ tali che } U \cap V = \emptyset.$$

Definizione 0.3.7. Uno spazio di Hausdorff X si dice *compatto* se da ogni suo ricoprimento costituito da una famiglia di insiemi aperti si può estrarre una sottofamiglia finita che è ancora un ricoprimento. In altre parole, per ogni famiglia $\{U_i\}_{i\in I}$ di sottoinsiemi aperti di X tale che $\bigcup_{i\in I} U_i \supseteq X$, esiste un sottoinsieme finito J di I tale che $\bigcup_{i\in J} U_i \supseteq X$.

Definizione 0.3.8. Uno spazio che soddisfa la definizione precedente, ma che non sia necessariamente di Hausdorff, è detto *quasi-compatto*.

Osservazione 0.3.9.

1. X con la topologia di Zariski è compatto;
2. La topologia di Zariski è T_0, ma non T_1 (in particolare neanche di Hausdorff).

0.4 Operazioni Star

Sia R un dominio d'integrità con campo dei quozienti K e sia $\mathbf{F}(R)$ l'insieme di tutti gli ideali frazionari non nulli di R. Sia inoltre $\mathbf{f}(R)$ l'insieme degli R-sottomoduli non nulli di K finitamente generati.

Definizione 0.4.1. Un'applicazione $\star : \mathbf{F}(R) \to \mathbf{F}(R)$, tale che $I \mapsto I^\star$, è chiamata *operazione star su* R se per ogni $a \in K$ e per ogni $A, B \in \mathbf{F}(R)$ valgono le seguenti condizioni:

1. $(a)^\star = (a)$, $(aR)^\star = aR^\star$;
2. $A \subseteq A^\star$ e se $A \subseteq B \Rightarrow A^\star \subseteq B^\star$;
3. $(A^\star)^\star = A^\star$.

Esempio 0.4.2.

1. Per ogni $I \in \mathbf{F}(R)$ poniamo $I^e := K$. e è un'operazione star banale;
2. Otteniamo un'altra operazione star banale ponendo $I^d := I$;
3. Per ogni $I \in \mathbf{F}(R)$ sia $I^{-1} = (R : I)$; poniamo $I^v := (I^{-1})^{-1}$. I è un *ideale* v se $I = I^v$.

Osservazione 0.4.3. Notiamo che $R = (1) = (1)^\star = D^\star$, e se I è un ideale intero di R, allora $I \subseteq I^\star \subseteq R^\star = R$. Quindi, ogni operazione star su R induce una funzione $I \mapsto I^\star$ di $\mathcal{I}(R)$, l'insieme degli ideali interi non nulli di R, in sé stesso, che soddisfa le condizioni enunciate.

Proposizione 0.4.4. *Sia* $\star : \mathbf{F}(R) \to \mathbf{F}(R)$ *un'operazione star su un dominio R. Allora per ogni* $A, B \in \mathbf{F}(R)$ *e per ogni famiglia* $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \mathbf{F}(R)$*, abbiamo:*

1. $(\sum_{i \in I} A_i)^\star = (\sum_{i \in I} A_i^\star)^\star$*, se* $\sum_{i \in I} A_i$ *è un ideale frazionario di* R*;*
2. *Se* $\bigcap_{i \in I} A_i^\star \neq (0)$*, allora* $\bigcap_{i \in I} A_i^\star = (\bigcap_{i \in I} A_i^\star)^\star$*;*
3. $(AB)^\star = (AB^\star)^\star = (A^\star B^\star)^\star$.

Definizione 0.4.5. Se $A \mapsto A^\star$ è un'operazione star su R, gli elementi dell'immagine sono chiamati *ideali star*. Equivalentemente A è un ideale star se $A^\star = A$.

Definizione 0.4.6. Un ideale star F si dice *star-finito* se esiste un elemento finitamente generato $A \in \mathbf{F}(R)$ tale che $F = A^\star$.

Denotiamo con S l'insieme di tutti gli ideali star di R.

Definizione 0.4.7. Definiamo l'operazione $A^\star \times B^\star := (A^\star B^\star)^\star = (AB)^\star$. Un'operazione star su R si dice *arithmetisch brauchbar* (a.b) se per ogni $A^\star, B^\star, C^\star \in S$ tali che $A^\star$ è star-finito, l'inclusione $A^\star \times B^\star \subseteq A^\star \times C^\star$ implica $B^\star \subseteq C^\star$.

Definizione 0.4.8. Un'operazione star è *endlich arithmetisch brauchbar* (e.a.b) se l'affermazione precedente è valida per tutti gli ideali star finiti $A^\star, B^\star, C^\star \in S$.

Definizione 0.4.9. Due operazioni star $\star_1$ e $\star_2$ si dicono *equivalenti* se $A^{\star_1} = A^{\star_2}$ per ogni ideale frazionario finitamente generato A di R.

Definizione 0.4.10. Sia R un dominio d'integrità. Per ogni $E \in \mathbf{F}(R)$ definiamo

$$E^{\star_f} := \bigcup \{F^\star : F \subseteq E, F \in \mathbf{f}(R)\}.$$

$E^{\star_f}$ è un ideale frazionario di R e $\star_f$ è chiamata l'*operazione star di tipo finito associata a* $\star$.

Esempio 0.4.11. L'operazione star di tipo finito associata all'operazione v si chiama *operazione* t ed è definita nel seguente modo:

$$I^t := \bigcup J^v \ J \subseteq I, J \in \mathbf{f}(R).$$

I è un *t-ideale* se $I = I^t$.

Osservazione 0.4.12.

1. $I \subseteq I^t \subseteq I^v$;
2. $I = I^t \Leftrightarrow$ per ogni $J \subseteq I$ finitamente generato, $J^v = I$.
3. Un v-ideale è sempre un t-ideale.
4. Se J è finitamente generato, allora $J^v = J^t \supseteq J$. In generale non è vero il viceversa.

Capitolo 1

Operazioni Semistar

Sia R un dominio d'integrità con campo dei quozienti K. Denotiamo con $\overline{\mathbf{F}}(R)$ l'insieme di tutti gli R-sottomoduli non nulli di K e con $\mathbf{F}(R)$ l'insieme di tutti gli ideali frazionari non nulli di R. Sia inoltre $\mathbf{f}(R)$ l'insieme degli R-sottomoduli non nulli di K finitamente generati. Quindi abbiamo

$$\mathbf{f}(R) \subseteq \mathbf{F}(R) \subseteq \overline{\mathbf{F}}(R).$$

Un'applicazione

$$\overline{\mathbf{F}}(R) \to \overline{\mathbf{F}}(R), \ E \mapsto E^{\star}$$

è chiamata *operazione semistar su* R se $\forall x \in K$, $x \neq 0$, e $\forall E, F \in \overline{\mathbf{F}}(R)$:

($\star_1$) $(xE)^{\star} = xE^{\star}$;

($\star_2$) $E \subseteq E^{\star}$, e $E \subseteq F \Rightarrow E^{\star} \subseteq F^{\star}$;

($\star_3$) $E^{\star\star} = E^{\star}$.

Se $E \in \overline{\mathbf{F}}(R)$, allora $E^{\star} \in \overline{\mathbf{F}}(R^{\star}) \subseteq \overline{\mathbf{F}}(R)$. Gli R-sottomoduli di K appartenenti a

$$\overline{\mathbf{F}}^{\star}(R) := \{E^{\star} : E \in \overline{\mathbf{F}}(R)\}$$

sono chiamati *R-moduli semistar di K*. Allo stesso modo possiamo considerare

$$\mathbf{F}^{\star}(R) := \{I^{\star} : I \in \mathbf{F}(R)\} \ \text{ e } \ \mathbf{f}^{\star}(R) := \{J^{\star} : J \in \mathbf{f}(R)\}.$$

Si nota facilmente che $\mathbf{F}^\star(R) \subseteq \mathbf{F}(R^\star)$, ma in generale $\mathbf{F}(R^\star) \nsubseteq \mathbf{F}(R)$, infatti $(R : R^\star)$ potrebbe essere l'ideale nullo. Un ideale (frazionario) I di R è chiamato *ideale (frazionario) semistar di* R, se $I \in \mathbf{F}^\star(R)$.

Osservazione 1.1. (a) Sia $F \in \overline{\mathbf{F}}(R)$. Allora F è un R-modulo semistar di K se e solo se $F = F^\star$.

(b) Sia $J \in \mathbf{F}(R)$. Allora J è un ideale semistar di R se e solo se $J = J^\star$.

(c) In generale $\overline{\mathbf{F}}^\star(R) \subsetneq \overline{\mathbf{F}}(R^\star)$ e $\mathbf{F}^\star(R) \subsetneq \mathbf{F}(R^\star)$. Sia (V, M) un dominio di valutazione non discreto 1-dimensionale con campo dei quozienti K. Sia $\star$ l'operazione canonica v. Notiamo che in ogni dominio di valutazione $\forall V$-sottomodulo E di K, $(V : E) \neq 0$. Quindi $\overline{\mathbf{F}}(V) \setminus \mathbf{F}(V) = K$. Inoltre gli ideali nondivisoriali di V sono della forma xM, dove $0 \neq x \in K$ e M è l'ideale massimale di V. Quindi $M \neq M^v = V$ e $V = V^v$. Chiaramente $\overline{\mathbf{F}}^v(V) \subsetneq \overline{\mathbf{F}}(V^v) = \overline{\mathbf{F}}(V)$ e $\mathbf{F}^v(V) \subsetneq \mathbf{F}(V^v) = \mathbf{F}(V)$.

Osservazione 1.2. Sia $\star$ un'operazione semistar su R tale che $R = R^\star$. Allora $\forall E \in \mathbf{F}(R)$, $E^\star \in \mathbf{F}(R)$. Infatti, se $0 \neq d \in R$ tale che $dE \subseteq R$, allora $dE^\star = (dE)^\star \subseteq R^\star = R$. In questo caso l'operazione semistar $\star$, ristretta a $\mathbf{F}(R)$, è definita *operazione star.*

Un'operazione semistar $\star$ su R si dice *propria* se $R \subsetneq R^\star$.

Teorema 1.3. *(a) Sia $\star$ un'operazione semistar su R. Allora $\forall E, F \in \overline{\mathbf{F}}(R)$ e per ogni famiglia $\{E_i : i \in I\}$ di elementi in $\overline{\mathbf{F}}(R)$:*

(1) $(\Sigma_{i\in I} E_i)^\star = (\Sigma_{i\in I} E_i^\star)^\star$;

(2) $\cap_{i\in I} E_i^\star = (\cap_{i\in I} E_i^\star)^\star$, se $\cap_{i\in I} E_i^\star \neq (0)$;

(3) $(EF)^\star = (E^\star F^\star)^\star = (EF^\star)^\star = (E^\star F)^\star$.

(b) Se S è un sopra-anello di R, allora $S^\star$ è un sopra-anello di $R^\star$. In particolare $R^\star$ è un sopra-anello di R.

(c) Sia $\mathcal{R} := \{R_\alpha : \alpha \in A\}$ una famiglia di sopra-anelli di R. Allora l'applicazione $E \mapsto E^\star$, dove $E^\star := \cap_{\alpha\in A} ER_\alpha$ è un'operazione semistar su R. Inoltre, $E^\star R_\alpha = ER_\alpha$ $\forall \alpha \in A$.

Dimostrazione. È molto simile alla dimostrazione data in [10, Proposizione 32.2 e Teorema 32.5]. □

L'operazione semistar definita nel punto (c) del Teorema 1.3 è chiamata *operazione semistar definita da* $\mathcal{R}$ e sarà indicata con $\star_{\mathcal{R}}$. Ovviamente $\star_{\mathcal{R}}$ è un'operazione semistar propria se e solo se $R \subsetneq \cap_{\alpha \in A} R_\alpha$. In particolare, se S è un sopra-anello proprio di R e $\mathcal{R} = \{S\}$ scriveremo $\star_{\{S\}}$ invece di $\star_{\mathcal{R}}$.

Di seguito alcuni esempi di operazioni semistar.

Esempio 1.4. (a) Poniamo $E^e := K$, $\forall E \in \overline{\mathbf{F}}(R)$, allora l'applicazione $E \mapsto E^e$ definisce una banale operazione semistar che è propria quando $R \neq K$ ed è chiamata *operazione* e. Ovviamente $e = \star_{\{K\}}$.

(b) L'applicazione $E \mapsto E^d := E$, $\forall E \in \overline{\mathbf{F}}(R)$ definisce un'altra operazione semistar banale chiamata *operazione* d. Ovviamente $d = \star_{\{R\}}$.

(c) $\forall E \in \overline{\mathbf{F}}(R)$, poniamo $E^{-1} := (R : E) := \{x \in K : xE \subseteq R\}$. L'applicazione $E \mapsto E^v = (E^{-1})^{-1}$ è un'operazione semistar tale che $R^v = R$, ed è chiamata *operazione* v *su* R. Come visto nell'Osservazione 1.2, questa operazione, quando viene ristretta a $\mathbf{F}(R)$, è la classica *operazione (star)* v *su* R.

(d) Sia $\mathcal{R} = \{R_\alpha : \alpha \in A\}$ una famiglia di sopra-anelli di R e, $\forall \alpha \in A$, sia $\star_\alpha$ un'operazione semistar su R_α. Allora $E \mapsto E^{\star_A}$, dove $E^{\star_A} = \cap_{\alpha \in A}(ER_\alpha)^{\star_\alpha}$ è un'operazione semistar su R. È semplice vedere che $(E^{\star_A} R_\alpha)^{\star_\alpha} = (ER_\alpha)^{\star_\alpha}$, $\forall E \in \overline{\mathbf{F}}(R)$ e $\forall \alpha \in A$. Notiamo che questo esempio è una generalizzazione della costruzione del punto (c) del Teorema 1.3 (basta prendere $\star_\alpha = d$, $\forall \alpha \in A$).

Un'operazione semistar $\star$ su R si dice di *tipo finito* se $\forall E \in \overline{\mathbf{F}}(R)$, $E^\star := \cup\{F^\star : F \in \mathbf{f}(R), F \subseteq E\}$. L'operazione e e l'operazione d sono operazioni semistar di tipo finito.

Per ogni operazione semistar $\star$ su R, possiamo costruire un'operazione semistar di tipo finito nel seguente modo: $E \mapsto E^{\star_f}$, dove $E^{\star_f} = \cup\{F^\star : F \in \mathbf{f}(R),\ F \subseteq E\}$, $\forall E \in \overline{\mathbf{F}}(R)$. L'operazione $\star_f$ è chiamata *operazione semistar finita associata a* $\star$. Ovviamente, $\star$ è un'operazione semistar di tipo finito se e solo se $\star = \star_f$.

Esempio 1.5. Se consideriamo l'operazione v semistar, allora l'operazione semistar finita associata a v è chiamata *operazione* t ed è così definita: $\forall E \in \overline{\mathbf{F}}(R)$, $E^t := \cup\{F^v : F \in \mathbf{f}(R),\ F \subseteq E\}$.

Notiamo che $E \in \overline{\mathbf{F}}(R) \setminus \mathbf{F}(R)$ se e solo se $E^{-1} = (0)$. Allora abbiamo che $E^v = K$. Quindi l'operazione semistar v è un esempio di operazione semistar estesa in maniera banale dall'operazione star v. Più precisamente:

Osservazione 1.6. (a) Sia $\star$ un'operazione star su un dominio d'integrità R. $\forall E \in \overline{\mathbf{F}}(R)$, sia

$$E^{\star_e} := E^{\star}, \text{ se } E \in \mathbf{F}(R),$$

$$E^{\star_e} := K, \text{ se } E \in \overline{\mathbf{F}}(R) \setminus \mathbf{F}(R).$$

Allora l'applicazione $E \mapsto E^{\star_e}$ definisce un'operazione semistar su R tale che $R^{\star_e} = R$. Questa è chiamata *estensione semistar banale di* $\star$. L'applicazione $\star \mapsto \star_e$ determina un'inclusione dell'insieme di tutte le operzioni star su R nell'insieme di tutte le operazioni semistar su R.

(b) Notiamo che $R \neq K$ se e solo se $K \in \overline{\mathbf{F}}(R) \setminus \mathbf{F}(R)$. Ovviamente per ogni operazione semistar $\star$ su R, $K^{\star} = K$. Un esempio di un'operazione semistar che non è estensione banale di un'operazione star è dato da $\star_{\{S\}}$, dove S è un sopra-anello di R tale che $(R : S) = 0$ con $S \neq K$.

Definiamo un ordine parziale sull'insieme delle operazioni semistar su R nella maniera seguente:

$$\star_1 \leq \star_2 \;:\Leftrightarrow\; E^{\star_1} \subseteq E^{\star_2} \; \forall E \in \overline{\mathbf{F}}(R).$$

Diciamo che $\star_1$ *è equivalente a* $\star_2$ e scriviamo $\star_1 \sim \star_2$, se $(\star_1)_f = (\star_2)_f$; ossia, $F^{\star_1} = F^{\star_2}$ $\forall F \in \mathbf{f}(R)$.

Proposizione 1.7. *Siano $\star$, $\star_1$ e $\star_2$ operazioni semistar su R.*

(a) Se $S \subseteq T$ sono sopra-anelli di R, allora $d = \star_{\{R\}} \leq \star_{\{S\}} \leq \star_{\{T\}} \leq \star_{\{K\}} = e$.

(b) $\star_f \leq \star$ e $\star_f \sim \star$.

(c) $\star_1 \leq \star_2 \Rightarrow (\star_1)_f \leq (\star_2)_f$.

(d) Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(i) $\star_1 \leq \star_2$;

(ii) $(E^{\star_1})^{\star_2} = E^{\star_2}$, $\forall E \in \overline{\mathbf{F}}(R)$;

(iii) $(E^{\star_2})^{\star_1} = E^{\star_2}$, $\forall E \in \overline{\mathbf{F}}(R)$;

(iv) $\overline{\mathbf{F}}^{\star_2}(R) \subseteq \overline{\mathbf{F}}^{\star_1}(R)$.

(e) *Quando* $R^\star = R$, *abbiamo che* $(E^\star)^{-1} = E^{-1}\ \forall E \in \overline{\mathbf{F}}(R)$, *quindi* $\star \leq v$ *e* $\star_f \leq t$.

Dimostrazione. Risulta immediata (cfr. con [1, p. 1623] e [14, Proposizioni 13 e 15]) □

La precedente proposizione mostra che per ogni sopra-anello S di R, $\star_{\{S\}}$ è la più piccola operazione semistar su R tale che $R^\star = S$; e v (rispettivamente, t) è la più grande operazione semistar (rispettivamente, operazione semistar di tipo finito) su R tale che $R = R^\star$.

I punti (b),(c),(d) e (e) della Proposizione 1.7 valgono anche per le operazioni star.

Se $\star$ è un'operazione semistar su R è facile vedere che:

($\star_4$) $(E \cap F)^\star \subseteq E^\star \cap F^\star$, $\forall E, F \in \overline{\mathbf{F}}(R)$;

($\star_5$) $(E : F)^\star \subseteq (E^\star : F^\star) = (E^\star : F)$, $\forall E, F \in \overline{\mathbf{F}}(R)$.

Diremo che l'operazione semistar $\star$ è *stabile* se:

($\star_{\mathbf{st}}$) $(E \cap F)^\star = E^\star \cap F^\star$, $\forall E, F \in \overline{\mathbf{F}}(R)$.

Osservazione 1.8. Sia $\star$ un'operazione semistar su R.

(a) Se $(E :_R F) = \{x \in R : xF \subseteq E\}$, allora $(E :_R F)^\star \subseteq (E^\star :_{R^\star} F^\star)$.

(b) Se $\star$ è stabile, allora

($\star_{\mathbf{st}}'$) $(E :_R F)^\star = (E^\star :_{R^\star} F^\star)$, $\forall E \in \overline{\mathbf{F}}(R)$ e $\forall F \in \mathbf{f}(R)$.

Dimostrazione. La dimostrazione di (a) è immediata; (b) segue dal fatto che $(E : F)^\star = (E^\star : F^\star)$. □

Vedremo nel prossimo capitolo che vale anche il viceversa; i.e. $(\boldsymbol{\star_{st}}) \Leftrightarrow (\boldsymbol{\star'_{st}})$ (Teorema 2.10 (b)).

Esempio 1.9. Sia $\mathcal{R} = \{R_\alpha : \alpha \in A\}$ una famiglia di sopra-anelli piatti di un dominio d'integrità. Allora $\star_{\mathcal{R}}$ è un'operazione semistar stabile; infatti $\forall E, F \in \overline{\mathbf{F}}(R)$ e $\forall \alpha \in A$, $(E \cap F)R_\alpha = ER_\alpha \cap FR_\alpha$.

Notiamo che, in generale, l'operazione v non è stabile. Infatti, anche se R è noetheriano e I, J sono due ideali interi di R, può accadere che $(I \cap J)^v \subsetneq I^v \cap J^v$. Ad esempio, se K è un campo e $R = K[[x^3, x^4, x^5]]$, allora R è un dominio noetheriano locale 1-dimensionale con ideale massimo $M = (x^3, x^4, x^5)$. Sia $I = (x^3, x^4)$ e $J = (x^3, x^5)$. Allora $I^v = J^v = M^v = M$, ma $I \cap J = (x^3)$ e $(I \cap J)^v = (I \cap J) = (x^3) \subsetneq (I^v \cap J^v) = M$.

Capitolo 2

Sistemi Localizzanti e Operazioni Semistar

Un *sistema localizzante* $\mathcal{F}$ di un dominio d'integrità R è una famiglia di ideali interi di R tali che:

(LS1) Se $I \in \mathcal{F}$ e J è un ideale di R tale che $I \subseteq J$, allora $J \in \mathcal{F}$;

(LS2) Se $I \in \mathcal{F}$ e J è un ideale di R tale che $(J :_R iR) \in \mathcal{F}\ \forall i \in I$, allora $J \in \mathcal{F}$.

Notiamo che gli assiomi **(LS1)** e **(LS2)** garantiscono, in particolare, che $\mathcal{F}$ è un filtro. Inoltre l'assioma **(LS2)** è legato al fatto che la topologia lineare corrispondente ad una teoria di torsione ereditaria ha la proprietà che la classe dei moduli discreti è chiusa rispetto all'estensione [15, Ch. VI, §5]. Più precisamente, quando consideriamo la sequenza

$$0 \to \frac{I}{J \cap I} \to \frac{R}{J} \to \frac{R}{I+J} \to 0,$$

(LS2) garantisce che se $\frac{R}{I+J}$ e $\frac{I}{J \cap I}$ appartengono alla classe di torsione $\mathcal{T}$ associata ad $\mathcal{F}$ allora anche $\frac{R}{J}$ appartiene a $\mathcal{T}$.

Per evitare casi non interessanti, assumiamo che un sistema localizzante $\mathcal{F}$ è non banale, cioè $(0) \notin \mathcal{F}$ e non è vuoto. È facile vedere che se $I, J \in \mathcal{F}$, allora $IJ \in \mathcal{F}$ e, quindi, $I \cap J \in \mathcal{F}$. Infatti $I \subseteq (IJ :_R jR)$ per ogni $j \in J$, allora per **(LS1)**, $(IJ :_R jR) \in \mathcal{F}$ per ogni $j \in J$. Se K è il campo dei quozienti di R, allora

$$R_{\mathcal{F}} = \{x \in K : (R :_R xR) \in \mathcal{F}\} = \cup\{(R : I) : I \in \mathcal{F}\}.$$

Notiamo che per ogni $x, y \in K$ valgono le seguenti relazioni:

$$(R :_R (x \pm y)R) \supseteq (R :_R xR) \cap (R :_R yR)$$

$$(R :_R xyR) \supseteq (R :_R xR)(R :_R yR)$$

e quindi $R_{\mathcal{F}}$ è un sopra-anello di R chiamato *anello delle frazioni rispetto a* $\mathcal{F}$. Se $E \in \overline{\mathbf{F}}(R)$, allora $E_{\mathcal{F}} = \{x \in K : (E :_R xR) \in \mathcal{F}\} = \cup\{(E : I) : I \in \mathcal{F}\}$ appartiene a $\overline{\mathbf{F}}(R_{\mathcal{F}})$.

Esempio 2.1. Se S è un sottoinsieme moltiplicativo di R, allora $\mathcal{F} = \{I$ ideale di $R : I \cap S = \emptyset\}$ è un sistema localizzante di R e $R_{\mathcal{F}} = S^{-1}R$. In particolare, sia P un ideale primo di R e $\mathcal{F}(P) = \{I : I$ ideale di $R,\ I \nsubseteq P\}$. Allora $\mathcal{F}(P)$ è un sistema localizzante e $R_{\mathcal{F}(P)} = R_P$.

È facile verificare che l'intersezione di una famiglia $\{\mathcal{F}_\alpha : \alpha \in A\}$ di sistemi localizzanti di R è ancora un sistema localizzante; quindi $\mathcal{F} = \cap\{\mathcal{F}_\alpha : \alpha \in A\}$ è un sistema localizzante e $R_{\mathcal{F}} = \cap\{R_{\mathcal{F}_\alpha} : \alpha \in A\}$. In particolare vediamo che se $\Delta \subseteq \operatorname{Spec}(R)$, allora $\mathcal{F}(\Delta) = \cap\{\mathcal{F}(P) : P \in \Delta\}$ è un sistema localizzante e $R_{\mathcal{F}(\Delta)} = \cap\{R_P : P \in \Delta\}$.

Se $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}''$ sono due sistemi localizzanti di R, allora $R_{\mathcal{F}'} \subseteq R_{\mathcal{F}''}$ [8, Lemma 5.1.3]; ma potrebbe accadere che $\mathcal{F}' \subsetneq \mathcal{F}''$ e $R_{\mathcal{F}'} = R_{\mathcal{F}''}$.

Esempio 2.2. Se V è un dominio di valutazione e P un ideale primo idempotente non nullo di V, allora $\hat{\mathcal{F}}(P) = \{I : I$ ideale di V e $I \supseteq P\}$ è un sistema localizzante di V e

$$\hat{\mathcal{F}}(P) \supsetneq \{I : I \text{ ideale di } V \text{ e } I \supsetneq P\} = \mathcal{F}(P).$$

Inoltre, $V_{\hat{\mathcal{F}}(P)} = V_P = V_{\mathcal{F}(P)}$, [8, Proposizione 5.1.12].

Lemma 2.3. *Se $\mathcal{F}$ è un sistema localizzante di un dominio d'integrità R, allora*

(a) $(E \cap F)_{\mathcal{F}} = E_{\mathcal{F}} \cap F_{\mathcal{F}},\ \forall E, F \in \overline{\mathbf{F}}(R)$*;*

(b) $(E : F)_{\mathcal{F}} = (E_{\mathcal{F}} : F_{\mathcal{F}}),\ \forall E \in \overline{\mathbf{F}}(R)$ *e* $\forall F \in \mathbf{f}(R)$*;*

(c) $(E_{\mathcal{F}} : F) = (E_{\mathcal{F}} : F_{\mathcal{F}}),\ \forall E, F \in \overline{\mathbf{F}}(R)$.

Dimostrazione. (a) Segue dal fatto che $((E \cap F) : I) = (E : I) \cap (F : I)$.

(b) Segue dal punto (b) dell'Osservazione 1.8, (a)$\Rightarrow$ (b).

(c) È immediato.

$\square$

Proposizione 2.4. *Sia $\mathcal{F}$ un sistema localizzante di un dominio d'integrità R. $\forall E \in \overline{\mathbf{F}}(R)$, l'applicazione $E \mapsto E_{\mathcal{F}} = \cup_{J \in \mathcal{F}}(E : J)$ determina un'operazione semistar stabile su R.*

Dimostrazione. Ovviamente l'applicazione $E \mapsto E_{\mathcal{F}}$ soddisfa le proprietà $(\boldsymbol{\star_1})$ e $(\boldsymbol{\star_2})$. Sia $x \in (E_{\mathcal{F}})_{\mathcal{F}}$, allora $xJ \subseteq E_{\mathcal{F}}$, per qualche $J \in \mathcal{F}$. Allora, $\forall j \in J$ esistono $K_j \in \mathcal{F}$ tali che $xj \in (E : K_j)$. Quindi $((E :_R xR) :_R jR) \supseteq K_j \in \mathcal{F}$. Da **(LS2)**, $(E :_R xR) \in \mathcal{F}$; cioè $x \in E_{\mathcal{F}}$. $\square$

Osservazione 2.5. (a) In generale $E_{\mathcal{F}} \supsetneq ER_{\mathcal{F}}$, anche se E è un ideale intero proprio di R. Ad esempio, sia V un dominio di valutazione con ideale massimale idempotente M, del tipo $V = K + M$, dove K è un campo. Sia k un sottocampo proprio di K e sia $R := k + M$. Dal fatto che M è idempotente si vede facilmente che $\mathcal{F} := \{M, R\}$ è un sistema localizzante di R. Allora $M_{\mathcal{F}} = R_{\mathcal{F}} = (M : M) = V$ e $MR_{\mathcal{F}} = MV = M$.

(b) Se I è un ideale non nullo contenuto in R, allora $I_{\mathcal{F}} = R_{\mathcal{F}}$ se e solo se $I \in \mathcal{F}$.

Denotiamo l'operazione semistar $E \mapsto E_{\mathcal{F}}$ con $\star_{\mathcal{F}}$. Dal punto (a) dell'Osservazione 2.5 sappiamo che in generale $\star_{\mathcal{F}}$ è diversa da $\star_{\{R_{\mathcal{F}}\}}$; più precisamente $\star_{\{R_{\mathcal{F}}\}} \leq \star_{\mathcal{F}}$. Con il seguente risultato vediamo quando vale l'uguaglianza.

Proposizione 2.6. *Sia $\mathcal{F}$ un sistema localizzante di un dominio d'integrità R. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) $\star_{\{R_{\mathcal{F}}\}} = \star_{\mathcal{F}}$*;*

(ii) $IR_{\mathcal{F}} = I_{\mathcal{F}}$ *,* $\forall I$ *ideale intero di* R*;*

(iii) $R_{\mathcal{F}}$ *è* R*-piatto e* $\mathcal{F} = \{I : I \text{ ideale di } R \text{ e } IR_{\mathcal{F}} = R_{\mathcal{F}}\}$*.*

Dimostrazione. (i)$\Rightarrow$ (ii) è banale.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Se $I \in \mathcal{F}$, allora $I_{\mathcal{F}} = R_{\mathcal{F}}$ e quindi $IR_{\mathcal{F}} = R_{\mathcal{F}}$. Questo implica che $R_{\mathcal{F}}$ è R-piatto.

(iii) $\Rightarrow$ (i) $ER_{\mathcal{F}} \subseteq E_{\mathcal{F}}, \forall E \in \overline{\mathbf{F}}(R)$, quindi dobbiamo mostrare l'inclusione opposta. Poiché $R_{\mathcal{F}}$ è R-piatto, sappiamo che $\mathcal{F}_0 = \{I$ ideale di $R : IR_{\mathcal{F}} = R_{\mathcal{F}}\}$ è un sistema localizzante di R, $R_{\mathcal{F}_0} = R_{\mathcal{F}}$ e $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$. Dalla piattezza, abbiamo anche che:

$$x \in E_{\mathcal{F}_0} \Leftrightarrow (E :_R xR) \in \mathcal{F}_0 \Leftrightarrow (E :_R xR)R_{\mathcal{F}_0} = R_{\mathcal{F}_0}$$

$$\Leftrightarrow (ER_{\mathcal{F}_0} :_{R_{\mathcal{F}_0}} xR_{\mathcal{F}_0}) = R_{\mathcal{F}_0} \Leftrightarrow x \in ER_{\mathcal{F}_0},$$

$\forall E \in \overline{\mathbf{F}}(R)$. Dato che stiamo anche assumendo che $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0$, possiamo concludere che $E^{\star_{\mathcal{F}}} = E_{\mathcal{F}} = ER_{\mathcal{F}} = E^{\star_{\{R_{\mathcal{F}}\}}}$. □

Osservazione 2.7. La condizione che $R_{\mathcal{F}}$ è R-piatto non è equivalente a (i) e (ii) nel precedente risultato. Siano V, P e $\hat{\mathcal{F}}(P)$ come nell'Esempio 2.2, allora $V_{\hat{\mathcal{F}}(P)} = V_P$ e $PV_{\hat{\mathcal{F}}(P)} = PV_P = P$. Inoltre, $P_{\hat{\mathcal{F}}(P)} = (P : P) = V_P$, poiché $P \in \hat{\mathcal{F}}(P)$ (Osservazione 2.5(b)).

Proposizione 2.8. *Se $\star$ è un'operazione semistar su R, allora $\mathcal{F}^\star = \{I : I$ ideale di R con $I^\star \cap R = R\}$ è un sistema localizzante di R.*

Dimostrazione. Ovviamente vale la proprietà **(LS1)**. Sia I un ideale di R e $J \in \mathcal{F}^\star$ tale che $(I :_R xR)^\star \cap R = R,\ \forall x \in J$. Allora

$$R = (I :_R xR)^\star \cap R = (I : xR)^\star \cap R \subseteq (I : xR)^\star \cap R^\star \cap R$$

$$\subseteq (I^\star : xR^\star) \cap R = (I^\star :_{R^\star} xR^\star) \cap R.$$

Quindi $x \in I^\star, \forall x \in J$. Allora $J \subseteq I^\star \cap R$ e quindi $I^\star \cap R \in \mathcal{F}^\star$. Questo implica che $I^\star \cap R = R$; quindi, $I \in \mathcal{F}^\star$. □

$\mathcal{F}^\star$ è chiamato *sistema localizzante associato a* $\star$.

Osservazione 2.9. Se $E = I$ è un ideale intero non nullo di R, allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(i) $I^\star \cap R \subsetneq R$;

(ii) $I^\star \subsetneq R^\star$.

In particolare abbiamo:

$$\mathcal{F}^\star = \{I : I \text{ ideale di } R \text{ con } I^\star \cap R = R\}$$

$$= \{I : I \text{ ideale di } R \text{ con } I^\star = R^\star\}.$$

Teorema 2.10. *(a) Sia $\mathcal{F}$ un sistema localizzante di un dominio d'integrità R e sia $\star_\mathcal{F}$ l'operazione semistar su R associata a $\mathcal{F}$. Allora*

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}^{\star_\mathcal{F}} = \{I \text{ ideale di } R : I_\mathcal{F} \cap R = R\}.$$

(b) Sia $\star$ un'operazione semistar su R e sia $\mathcal{F}^\star$ il sistema localizzante associato a $\star$. Allora

$$\star_{\mathcal{F}^\star} \leq \star.$$

Inoltre, le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(i) $\star_{\mathcal{F}^\star} = \star$;

(ii) $\star$ *è un'operazione semistar stabile;*

(iii) $(E :_R F)^\star = (E^\star :_{R^\star} F^\star)$, $\forall E \in \overline{\mathbf{F}}(R)$ *e* $\forall F \in \mathbf{f}(R)$;

(iv) $(E :_R xR)^\star = (E^\star :_{R^\star} xR^\star)$, $\forall E \in \overline{\mathbf{F}}(R)$ *e* $\forall 0 \neq x \in K$.

Dimostrazione. (a) Notiamo che per ogni ideale non nullo I di R, $I_\mathcal{F} \cap R = R \Leftrightarrow I_\mathcal{F} = R_\mathcal{F} \Leftrightarrow I \in \mathcal{F}$ (Osservazione 2.5(b)).

(b) Sia $E \in \overline{\mathbf{F}}(R)$ e $x \in E^{\star_{\mathcal{F}^\star}} = E_{\mathcal{F}^\star}$. Allora $(E :_R xR) \in \mathcal{F}^\star$, quindi:

$$R = R \cap (E :_R xR)^\star = R \cap ((E : xR) \cap R)^\star$$

$$\subseteq R \cap (E : xR)^\star \cap R^\star \subseteq R \cap (E^\star :_{R^\star} xR^\star).$$

Quindi, $1 \in (E^\star :_{R^\star} xR^\star)$ che implica che $x \in E^\star$.

Per la seconda parte, (i) $\Rightarrow$ (ii) viene dalla Proposizione 2.4, (ii) $\Rightarrow$ (iii) dal punto (b) dell'Osservazione 1.8 e (iii) $\Rightarrow$ (iv) è banale. Per (iv) $\Rightarrow$ (i) ci basta dimostrare che $E^\star \subseteq E^\star_{\mathcal{F}^\star}$, $\forall E \in \overline{\mathbf{F}}(R)$. Sia $x \in E^\star$, allora

$$R = R \cap (E^\star :_{R^\star} xR^\star) = R \cap (E :_R xR)^\star.$$

Quindi, $(E :_R xR) \in \mathcal{F}^\star$, cioè, $x \in E_{\mathcal{F}^\star}$.

$\square$

Sia $\mathbf{SStar}(R)$ (rispettivamente, $\mathbf{Star}(R)$) l'insieme di tutte le operazioni semistar (rispettivamente, star) definite su R e sia $\mathbf{LS}(R)$ (rispettivamente, $\mathbf{LS_0}(R)$), l'insieme dei sistemi localizzanti di R (rispettivamente, dei sistemi localizzanti $\mathcal{F}$ di R tali che $R_{\mathcal{F}} = R$).

Corollario 2.11. *L'applicazione canonica* $\star : \mathbf{LS}(R) \to \mathbf{SStar}(R)$ *(rispettivamente,* $\star : \mathbf{LS_0}(R) \to \mathbf{Star}(R)$*) ,* $\mathcal{F} \mapsto \star_{\mathcal{F}}$ *è iniettiva e mantiene l'ordine. L'immagine di questa applicazione è l'insieme di tutte le operazioni semistar (rispettivamente, star) stabili.*

Dimostrazione. Consideriamo il seguente diagramma

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbf{LS}(R) & \\
\mathbf{LS}(R) \arrow[ur, "id"] \arrow[rr, hook, "\star"] & & \mathbf{SStar}(R) \arrow[ul, "l"'] \\
 & \mathbf{LS_0}(R) & \\
\mathbf{LS_0}(R) \arrow[uu, hook] \arrow[ur, "id"] \arrow[rr, hook, "\star"] & & \mathbf{Star}(R) \arrow[ul, "l"'] \arrow[uu, hook]
\end{tikzcd}
$$

dove $\star : \mathbf{LS}(R) \to \mathbf{SStar}(R)$ è definita da $\mathcal{F} \mapsto \star_{\mathcal{F}}$, $l : \mathbf{SStar}(R) \to \mathbf{LS}(R)$ è definita da $\star \mapsto \mathcal{F}^{\star}$, id è l'applicazione identità e la seconda inclusione verticale è definita nel punto (a) dell'Osservazione 1.6. È facile vedere che se $\mathcal{F} \in \mathbf{LS_0}(R)$, allora $\star_{\mathcal{F}} \in \mathbf{Star}(R)$ (quando ristretto a $\mathbf{F}(R)$); e se $\star \in \mathbf{Star}(R)$, allora $\mathcal{F}^{\star} \in \mathbf{LS_0}(R)$ (perché $x \in R_{\mathcal{F}^{\star}} \Rightarrow (R :_R xR) \in \mathcal{F}^{\star} \Rightarrow (R :_R xR)^{\star} = R \Rightarrow (R :_R xR) = R \Rightarrow x \in R$). Dal Teorema 2.10(a) il diagramma commuta e dal Teorema 2.10(b) l'applicazione $\star$ definisce una biiezione con l'insieme $\mathbf{SStar}_{st}(R)$ di tutte le operazioni semistar stabili definite su R. Si vede banalmente che $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \Rightarrow \star_{\mathcal{F}_1} \leq \star_{\mathcal{F}_2}$ e che $\star_1 \leq \star_2 \Rightarrow \mathcal{F}^{\star_1} \subseteq \mathcal{F}^{\star_2}$. $\square$

Capitolo 3

Condizioni di Finitezza

Un sistema localizzante $\mathcal{F}$ definito su un dominio d'integrità R, si dice *di tipo finito* (rispettivamente, *principale*), se $\forall I \in \mathcal{F}$ esiste un ideale non nullo finitamente generato (rispettivamente, principale) $J \in \mathcal{F}$ tale che $J \subseteq I$. Ad esempio, se T è un sopra-anello di R, $\mathcal{F}(T) = \{I : I \text{ ideale di } R, IT = T\}$ è un sistema localizzante di tipo finito; in particolare se T è R-piatto, allora $R_{\mathcal{F}(T)} = T$ [8, Proposizione 5.1.10]. L'Esempio 2.2 non è di tipo finito.

Lemma 3.1. *Dato un sistema localizzante $\mathcal{F}$ su un dominio d'integrità R, $\mathcal{F}_f = \{I \in \mathcal{F} : I \supseteq J$, per qualche ideale non nullo finitamente generato $J \in \mathcal{F}\}$ è un sistema localizzante di tipo finito di R.*

Dimostrazione. Poiché $\mathcal{F}_f$ banalmente soddisfa **(LS1)**, ci basta dimostrare **(LS2)**. Sia I un ideale di R tale che per qualche ideale non nullo finitamente generato $J \in \mathcal{F}$, $(I :_R xR) \in \mathcal{F}_f$, $\forall x \in J$. In particolare, se $J = \xi_1 R + \cdots + \xi_n R$, allora esiste $H_i \in \mathcal{F}$ finitamente generato, tale che $H_i \subseteq (I :_R \xi_i R)$ per $i = 1, 2, \ldots, n$. Se $H = \prod_{i=1}^{n} H_i$, allora $H \in \mathcal{F}_f$ e $H\xi_i \subseteq I, \forall i$. Quindi $HJ \subseteq I$, con $HJ \in \mathcal{F}_f$. Questo implica che $I \in \mathcal{F}_f$. $\square$

Proposizione 3.2. *Sia $\mathcal{F}$ un sistema localizzante e $\star$ un'operazione semistar definita su un dominio d'integrità R.*

(a) Se $\mathcal{F}$ è di tipo finito, allora $\star_{\mathcal{F}}$ è di tipo finito.

(b) Se $\star$ è di tipo finito, allora $\mathcal{F}^{\star}$ è di tipo finito.

Dimostrazione. (a) Sia $E \in \overline{\mathbf{F}}(R)$ e $x \in E^{\star_{\mathcal{F}}} = E_{\mathcal{F}}$. Allora esiste un ideale finitamente generato $J \in \mathcal{F}$ tale che $xJ \subseteq E$. Quindi $x \in (xJ : J) \subseteq (xJ)_{\mathcal{F}} \subseteq E_{\mathcal{F}}$, dove $xJ \in \mathbf{f}(R)$, e quindi $E_{\mathcal{F}} = \cup\{F_{\mathcal{F}} : F \in \mathbf{f}(R)\}$.

(b) Sia I un ideale di $\mathcal{F}^\star$, allora $I^\star \cap R = R$. Poiché $\star$ è di tipo finito, per qualche ideale finitamente generato $J \subseteq I$, $J^\star \cap R = R$. Quindi $J \in \mathcal{F}^\star$.

$\square$

Denotiamo con $\mathbf{LS}_f(R)$ (rispettivamente, $\mathbf{LS_0}_f$(R)) l'insieme dei sistemi localizzanti di R di tipo finito (rispettivamente, di tipo finito $\mathcal{F}$ tali che $R_\mathcal{F} = R$). Denotiamo con $\mathbf{SStar}_f$(R) (rispettivamente, $\mathbf{Star}_f$(R)) l'insieme delle operazioni semistar (rispettivamente, star) di R di tipo finito.

Proposizione 3.3. *Sia R un dominio d'integrità; sia $\star : \mathbf{LS}(R) \to \mathbf{SStar}(R)$ l'applicazione difinita nel Corollario 2.11; sia f definita dalle seguenti applicazioni*

$$f : \mathbf{LS}(R) \to \mathbf{LS}_f(R),\ \ \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_f$$
$$f : \mathbf{SStar}(R) \to \mathbf{SStar}_f(R),\ \ \star \mapsto \star_f.$$

Consideriamo i seguenti diagrammi:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{LS}(R) \arrow[r, "\star"] \arrow[d, "f"'] & \mathbf{SStar}(R) \arrow[d, "f"] \\ \mathbf{LS}_f(R) \arrow[r, "\star"] & \mathbf{SStar}_f(R) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \star_\mathcal{F} \arrow[d, mapsto] \\ \mathcal{F}_f \arrow[r, mapsto] & \star_{\mathcal{F}_f}, (\star_\mathcal{F})_f \end{tikzcd}$$

Allora $\star_{\mathcal{F}_f} \leq (\star_\mathcal{F})_f$, $\forall \mathcal{F} \in \mathbf{LS}(R)$.

Dimostrazione. Poiché $\mathcal{F}_f \subseteq \mathcal{F}$, allora $\star_{\mathcal{F}_f} \leq \star_\mathcal{F}$ (Corollario 2.11). Inoltre, $\star_{\mathcal{F}_f}$ è un'operazione semistar di tipo finito per la Proposizione 3.2. Quindi $\star_{\mathcal{F}_f} = (\star_{\mathcal{F}_f})_f \leq (\star_\mathcal{F})_f$. $\square$

Per semplicità, mantenendo la stessa notazione per le applicazioni $\star$ e f, restringendo a $\mathbf{LS_0}$(R) e $\mathbf{Star}$(R), abbiamo:

Corollario 3.4. *Consideriamo il diagramma*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{LS_0}(R) \arrow[r, "\star"] \arrow[d, "f"'] & \mathbf{Star}(R) \arrow[d, "f"] \\ \mathbf{LS_0}_f(R) \arrow[r, "\star"] & \mathbf{Star}_f(R) \end{tikzcd}$$

Allora, $\forall \mathcal{F} \in \mathbf{LS_0}(R), \star_{\mathcal{F}_f} \leq (\star_{\mathcal{F}})_f$.

Notiamo che in generale $\star_{\mathcal{F}_f} \lneq (\star_{\mathcal{F}})_f$:

Esempio 3.5. Siano R, V, M e $\mathcal{F}$ come nell'Osservazione 2.5(a). Allora $\mathcal{F}_f = \{R\}$ e $I^{\star_{\mathcal{F}_f}} = (I : R) = I$, per ogni ideale $I \in R$. D'altra parte $I^{(\star_{\mathcal{F}})_f} = \cup\{J^{\star_{\mathcal{F}}} : J$ ideale finitamente generato, $J \subseteq I\} = \cup\{(J : M) : J$ ideale finitamente generato, $J \subseteq I\}$. Ad esempio, se $I = xR$ per qualche $x \in R$ non nullo, allora $(xR)^{\star_{\mathcal{F}_f}} = xR \subsetneq (xR)^{(\star_{\mathcal{F}})_f} = x(R : M) = xV$.

Lemma 3.6. *Sia $\mathcal{F}$ un sistema localizzante su un dominio d'integrità R. Allora $\mathcal{F}^{(\star_{\mathcal{F}})_f} = \mathcal{F}_f$.*

Dimostrazione. Per la Proposizione 3.3, $\star_{\mathcal{F}_f} \leq (\star_{\mathcal{F}})_f$. Allora per il Teorema 2.10(a), $\mathcal{F}_f = \mathcal{F}^{\star_{\mathcal{F}_f}} \subseteq \mathcal{F}^{(\star_{\mathcal{F}})_f} \subseteq \mathcal{F}^{\star_{\mathcal{F}}} = \mathcal{F}$. Dal fatto che $(\star_{\mathcal{F}})_f$ è un'operazione semistar di tipo finito, $\mathcal{F}^{(\star_{\mathcal{F}})_f}$ è di tipo finito (Proposizione 3.2(b)). Ma $\mathcal{F}_f$ è il più grande sistema localizzante di tipo finito contenuto in $\mathcal{F}$. Quindi abbiamo $\mathcal{F}_f = \mathcal{F}^{(\star_{\mathcal{F}})_f}$. □

Teorema 3.7. *Sia $\mathcal{F}$ un sistema localizzante su un dominio d'integrità R. Allora $\star_{\mathcal{F}_f} = (\star_{\mathcal{F}})_f$ se e solo se $(\star_{\mathcal{F}})_f$ è stabile.*

Dimostrazione. ($\Leftarrow$) Supponiamo che $(\star_{\mathcal{F}})_f$ sia stabile. Per il Lemma 3.6 $\mathcal{F}_f = \mathcal{F}^{(\star_{\mathcal{F}})_f}$. Allora, per il Teorema 2.10(b), $\star_{\mathcal{F}_f} = \star_{\mathcal{F}^{(\star_{\mathcal{F}})_f}} = (\star_{\mathcal{F}})_f$.
($\Rightarrow$) Supponiamo che $(\star_{\mathcal{F}})_f = \star_{\mathcal{F}_f}$. Allora, poiché $\star_{\mathcal{F}_f}$ è stabile, per la Proposizione 2.4, anche $(\star_{\mathcal{F}})_f$ è stabile. □

Data un'operazione semistar $\star$ su R, possiamo considerare le seguenti operazioni semistar associate a $\star$:

$$\bar{\star} = \star_{\mathcal{F}^\star}, \quad \tilde{\star} = (\star)_{(\mathcal{F}^\star)_f}$$

dove $\forall E \in \overline{\mathbf{F}}(R)$,

$$\begin{aligned} E^{\bar{\star}} &= E_{\mathcal{F}^\star} = \cup\{(E : I) : I \in \mathcal{F}^\star\}, \\ E^{\tilde{\star}} &= E_{(\mathcal{F}^\star)_f} = \cup\{(E : J) : J \in \mathcal{F}^\star,\ J \text{ finitamente generato }\}. \end{aligned}$$

Segue dal Corollario 2.11 che $\bar{\bar{\star}} = \bar{\star}$, $\tilde{\tilde{\star}} = \tilde{\star}$ e $\tilde{\star} \leq \bar{\star}$; inoltre $\star_1 \leq \star_2$ implica che $\overline{\star_1} \leq \overline{\star_2}$ e $\widetilde{\star_1} \leq \widetilde{\star_2}$.
Notiamo che se $\star$ è un'operazione star, anche $\bar{\star}$ e $\tilde{\star}$ lo sono.

Proposizione 3.8. *Sia $\star$ un'operazione semistar su un dominio d'integrità R, allora:*

(a) $(\bar{\star})_f \leq \star_f \leq \star$ *e* $(\bar{\star})_f \leq \bar{\star} \leq \star$.

(b) $\widetilde{(\star_f)} = \overline{(\star_f)} = \tilde{\star}$.

Dimostrazione. (a) segue dalla Proposizione 1.7(b) e (c) e dal Teorema 2.10(b). Abbiamo già osservato che $\tilde{\star} \leq \bar{\star}$. Dalla Proposizione 3.2(a), $\tilde{\star}$ è di tipo finito, quindi $\tilde{\star} \leq (\bar{\star})_f$. Dalle considerazioni precedenti, $\widetilde{(\star_f)} \leq \overline{(\star_f)}$ e $\widetilde{(\star_f)} \leq \tilde{\star}$. Sia $E \in \overline{\mathbf{F}}(R)$ e $x \in E^{\tilde{\star}} = E^{\star_{(\mathcal{F}^\star)_f}}$. Allora esiste un ideale finitamente generato J di R tale che $xJ \subseteq E$ e $J^\star \cap R = R$. Poiché J è finitamente generato, $J^{\star_f} = J^\star$ e quindi $J \in \mathcal{F}^{\star_f}$ e $x \in E^{\widetilde{(\star_f)}}$; i.e., $\tilde{\star} \leq \widetilde{(\star_f)}$. Se $y \in E^{\overline{(\star_f)}}$, allora $yI \subseteq E$ per qualche I tale che $I^{\star_f} \cap R = R$. Poiché $I^{\star_f} = \cup\{J^\star : J$ è un ideale finitamente generato, $J \subseteq I\}$, allora necessariamente per qualche J finitamente generato, $J^\star \cap R = R$. Quindi $yJ \subseteq E$ con J finitamente generato, $J \subseteq I$ e $J \in \mathcal{F}^{\star_f}$. Allora $I \in (\mathcal{F}^{\star_f})_f$, da cui $y \in E^{\widetilde{(\star_f)}}$; i.e., $\overline{(\star_f)} \leq \widetilde{(\star_f)}$. □

Proposizione 3.9. *Sia $\star$ un'operazione semistar su un dominio d'integrità R. Allora*

(a) $\bar{\star}$ *è la più grande delle operazioni semistar stabili su R, che sono $\leq \star$; in particolare $\star$ è stabile $\Leftrightarrow \star = \bar{\star}$;*

(b) Se $\star'$ è un'operazione semistar tale che $\bar{\star} \leq \star' \leq \star$, allora $\mathcal{F}^{\bar{\star}} = \mathcal{F}^{\star'} = \mathcal{F}^{\star}$.

Dimostrazione. (a) Essendo $\bar{\star}$ associata a un sistema localizzante, per la Proposizione 2.4 $\bar{\star}$ è stabile. Inoltre se $\star'$ è un'operazione semistar stabile $\leq \star$, allora $\star' = \overline{(\star')} \leq \bar{\star}$.

(b) Chiaramente, $\mathcal{F}^{\bar{\star}} \subseteq \mathcal{F}^{\star'} \subseteq \mathcal{F}^{\star}$. La conclusione segue dal Teorema 2.10(a), poiché $\mathcal{F}^{\bar{\star}} = \mathcal{F}^{\star_{\mathcal{F}^\star}} = \mathcal{F}^{\star}$.

□

Corollario 3.10. *Sia $\star$ un'operazione semistar su un dominio d'integrità R. Allora*

$$\mathcal{F}^{\star_f} = \mathcal{F}^{\tilde{\star}} = \mathcal{F}^{\widetilde{(\star_f)}} = \mathcal{F}^{\overline{(\star_f)}} = \mathcal{F}^{(\bar{\star})_f} \subseteq \mathcal{F}^{\bar{\star}} = \mathcal{F}^{\star}.$$

Inoltre $\mathcal{F}^{\star_f} = (\mathcal{F}^\star)_f$.

Dimostrazione. Segue dalle Proposizioni 3.8 e 3.9. Resta da provare che $\mathcal{F}^{\star_f} = (\mathcal{F}^{\star})_f$. Per la Proposizione 3.2, $\mathcal{F}^{\star_f}$ è un sistema localizzante di tipo finito. Quindi $\mathcal{F}^{\star_f} = (\mathcal{F}^{\star_f})_f \subseteq (\mathcal{F}^{\star})_f$. Se $I \in (\mathcal{F}^{\star})_f$, allora esiste un ideale finitamente generato $J \subseteq I$ tale che $R = J^{\star} \cap R = J^{\star_f} \cap R$. Quindi $J \in \mathcal{F}^{\star_f}$, che implica che $I \in \mathcal{F}^{\star_f}$. $\square$

Corollario 3.11. *Sia $\star$ un'operazione semistar su un dominio d'integrità R. Allora:*

(a) $\overline{\star} = \widetilde{\star} \Leftrightarrow \overline{\star}$ *è un'operazione semistar di tipo finito;*

(b) $\star = \widetilde{\star} \Leftrightarrow \star$ *è un'operazione semistar stabile di tipo finito;*

(c) $\overline{\widetilde{\star}} = \widetilde{\star} = \widetilde{\overline{\star}}$*;*

(d) $\star_f = \widetilde{\star} \Leftrightarrow \star_f = \overline{(\star_f)}$*.*

Dimostrazione. (a) Per la Proposizione 2.4, $\overline{\star}$ e $\widetilde{\star}$ sono operazioni semistar stabili. Allora, per il Corollario 3.10, abbiamo che $\overline{\star} = \star_{\mathcal{F}^{\overline{\star}}} = \star_{\mathcal{F}^{\star}}$ e $\widetilde{\star} = \star_{\mathcal{F}^{\widetilde{\star}}} = \star_{\mathcal{F}^{\star_f}} = \star_{\mathcal{F}^{(\overline{\star})_f}}$. Per i Corollari 2.11 e 3.10 e per la Proposizione 3.3 possiamo concludere che $\overline{\star} = \widetilde{\star} \Leftrightarrow \mathcal{F}^{\star} = \mathcal{F}^{\star_f} = (\mathcal{F}^{\star})_f$; i.e., $\overline{\star}$ è di tipo finito.

(b) Segue da (a), poiché $\star = \widetilde{\star} \Leftrightarrow \star = \overline{\star}$ e $\overline{\star} = \widetilde{\star}$.

(c) È conseguenza dei Corollari 2.11 e 3.10.

(d) Segue dalla Proposizione 3.8.

$\square$

È facile mostrare che le Proposizioni 3.8 e 3.9 e i Corollari 3.10 e 3.11 valgono anche se ristretti ad operazioni star e a sistemi localizzanti $\mathcal{F}$ di R con la proprietà che $R_{\mathcal{F}} = R$.

Corollario 3.12. *Consideriamo il seguente diagramma:*

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{SStar}(R) \arrow[r, "l"] \arrow[d, "f"] & \mathbf{LS}(R) \arrow[r, "\star"] \arrow[d, "f"] & \mathbf{SStar}(R) \arrow[d, "f"] \\
\mathbf{SStar}_f(R) \arrow[r, "l"] & \mathbf{LS}_f(R) \arrow[r, "\star"] & \mathbf{SStar}_f(R)
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\star \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \mathcal{F}^{\star} \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \overline{\star} \arrow[d, mapsto] \\
\star_f \arrow[r, mapsto] & \mathcal{F}^{\star_f} \arrow[r, mapsto] & \widetilde{\star} \leq (\overline{\star})_f
\end{tikzcd}
$$

Per i Corollari 3.10 e 3.11 le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(i) *Il diagramma commuta;*

(ii) *La parte destra del diagramma commuta;*

(iii) $\overline{\star} = \widetilde{\star}$, $\forall \star \in \mathbf{SStar}(R)$;

(iv) $\overline{\star} \in \mathbf{SStar}_f(R)$).

In generale $\widetilde{\star} = \overline{(\star_f)} \lneq (\overline{\star})_f$.

Esempio 3.13. Un'operazione semistar $\star$ tale che $\overline{(\star_f)} \lneq (\overline{\star})_f$. Sia R un dominio integralmente chiuso e sia $\{V_\alpha : \alpha \in A\}$ la famiglia di tutti i sopra-anelli di valutazione di R. $\forall E \in \overline{\mathbf{F}}(R)$, poniamo $E^b := \cap\{EV_\alpha : \alpha \in A\}$. Per il Teorema 1.3(c),l'applicazione $E \mapsto E^b$ definisce un'operazione semistar su R con $R^b = R$. Se R è un dominio essenziale (i.e., se ogni V_α è una localizzazione di R con centro in R), allora l'operazione b è stabile (Esempio 1.9). Per la Proposizione 1.7(e), $b \leq v$. Vogliamo mostare che $b \sim v$. Sia $F = x_1R + \cdots + x_nR \in \mathbf{f}(R)$ e sia $\xi \in F^v$. Vediamo che $\xi \in F^b$. Supponiamo che $\xi \notin F^b$, allora $\xi \notin FV_\alpha = FR_{P_\alpha}$ per qualche $\alpha \in A$, dove $P_\alpha = V_\alpha \cap R$. Allora $FR_{P_\alpha} = xR_{P_\alpha}$ per qualche $x \in F$, poiché FR_{P_α} è un ideale invertibile del dominio di valutazione R_{P_α}. Quindi $xR_{P_\alpha} \subsetneq \xi R_{P_\alpha}$. Per ogni generatore x_i di F, scriviamo $x_i = xr_it^{-1}$, dove $r_i \in R$ e $t \in R \setminus P_\alpha, \forall \alpha$. Quindi $F \subseteq xt^{-1}R$ e $F^v \subseteq xt^{-1}R$. D'altra parte $\xi \notin xt^{-1}R$ e quindi $\xi \notin F^v$.

Capitolo 4

Sistemi Localizzanti Spettrali e Operazioni Semistar

Sia Δ un insieme non vuoto di ideali primi di un dominio d'integrità R. $\forall E \in \overline{\mathbf{F}}(R)$, definiamo $E^{\star_\Delta} = \cap\{ER_P : P \in \Delta\}$. In seguito, per evitare casi banali, assumeremo sempre $\Delta \neq \emptyset$.

Lemma 4.1. *(a) L'applicazione $E \mapsto E^{\star_\Delta}$, $\forall E \in \overline{\mathbf{F}}(R)$, definisce un'operazione semistar su R.*

(b) $\forall E \in \overline{\mathbf{F}}(R)$ e $\forall P \in \Delta$, $ER_P = E^{\star_\Delta} R_P$.

(c) $\star_\Delta$ è un'operazione semistar stabile.

(d) $\forall P \in \Delta$, $P^{\star_\Delta} \cap R = P$.

(e) $\forall$ ideale intero $I \subseteq R$ tale che $I^{\star_\Delta} \cap R \neq R$, esiste un ideale primo $P \in \Delta$ tale che $I \subseteq P$.

Dimostrazione. (a) e (b) sono casi particolari del punto (c) del Teorema 1.3

(c) Se $E, F \in \overline{\mathbf{F}}(R)$, allora, per planarità:

$$E^{\star_\Delta} \cap F^{\star_\Delta} = (\cap_{P\in\Delta} ER_P) \cap (\cap_{P\in\Delta} FR_P) = \cap_{P\in\Delta}(ER_P \cap FR_P)$$

$$= \cap_{P\in\Delta}(E \cap F)R_P = (E \cap F)^{\star_\Delta}.$$

(d) Segue banalmente dal fatto che $P^{\star_\Delta} = \cap\{PR_Q : Q \in \Delta \text{ e } Q \supseteq P\}$.

(e) Se $I^{\star_\Delta} \cap R \neq R$, allora $I^{\star_\Delta} \subsetneq R^{\star_\Delta}$ e $I^{\star_\Delta} R_P \neq R_P$, per qualche $P \in \Delta$. Allora, $I^{\star_\Delta} R_P \subseteq PR_P$ e quindi $I \subseteq I^{\star_\Delta} \subseteq I^{\star_\Delta} R_P \cap R \subseteq PR_P \cap R = P$.

$\square$

Notiamo che le proprietà del Lemma 4.1 valgono anche per le operazioni star.

Un'operazione semistar $\star$, definita su un dominio d'integrità R, è *spettrale* se $\exists\, \Delta \subseteq \mathrm{Spec}(R)$ tale che $\star = \star_\Delta$. In questo caso, diremo che $\star$ è l'*operazione semistar spettrale associata a* Δ. Diciamo che $\star$ *possiede abbastanza primi*, o è un'*operazione semistar quasi-spettrale*, se per ogni ideale intero I di R, tale che $I^\star \cap R \neq R$, esiste un ideale primo P di R con $I \subseteq P$ e $P^\star \cap R = P$. Per il Lemma 4.1(e) osserviamo che un'operazione semistar spettrale è quasi-spettrale. Vedremo che il viceversa non è vero, in generale.

Notiamo che l'applicazione $\Delta \mapsto \star_\Delta$ è controvariante; i.e., $\Delta_1 \subseteq \Delta_2 \Rightarrow \star_{\Delta_2} \leq \star_{\Delta_1}$.

Diciamo che un sistema localizzante $\mathcal{F}$ di R è *spettrale* se esiste un insieme di ideali primi Δ di R tale che $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\Delta) = \cap\{\mathcal{F}(P) : P \in \Delta\}$, dove $\mathcal{F}(P)$ è il sistema localizzante $\{I : I \text{ ideale di } R, I \nsubseteq P\}$. Notiamo che, $\Delta_1 \subseteq \Delta_2 \Rightarrow \mathcal{F}(\Delta_2) \subseteq \mathcal{F}(\Delta_1)$.

Dato $\mathcal{F}$, possiamo considerare il seguente sottoinsieme di $\mathrm{Spec}(R)$ associato a $\mathcal{F}$:

$$\Phi = \Phi_{\mathcal{F}} = \{P \in \mathrm{Spec}(R) : P \notin \mathcal{F}\}.$$

Se $\mathcal{F}$ non è banale, allora $\Phi \neq \emptyset$ e possiamo considerare $\mathcal{F}_{sp} = \mathcal{F}(\Phi)$ che è chiamato il *sistema localizzante spettrale associato a* $\mathcal{F}$. È facile vedere che

$$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_{sp}, \text{ e } \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \Rightarrow (\mathcal{F}_1)_{sp} \subseteq (\mathcal{F}_2)_{sp}.$$

Lemma 4.2. *Sia* Δ *un insieme non vuoto di ideali primi di un dominio d'integrità. Allora*

$$\star_\Delta = \star_{\mathcal{F}(\Delta)} \;\; e \;\; \mathcal{F}^{\star_\Delta} = \mathcal{F}(\Delta);$$

i.e., l'operazione semistar (spettrale) $\star_\Delta$ *è associata al sistema localizzante (spettrale)* $\mathcal{F}(\Delta)$ *e viceversa.*

Dimostrazione. Poiché $\star_\Delta$ è stabile (Lemma 4.1(c)), abbiamo che

$$\star_\Delta = \overline{(\star_\Delta)} = \star_{\mathcal{F}^{\star_\Delta}}.$$

Inoltre,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{\star_\Delta} &= \{I : I \text{ ideale di } R \text{ tale che } (\cap_{P\in\Delta} IR_P) \cap R = R\} \\
&= \{I : I \text{ ideale di } R \text{ tale che } IR_P = R_P,\ \forall P \in \Delta\} \\
&= \{I : I \text{ ideale di } R \text{ tale che } I \nsubseteq P,\ \forall P \in \Delta\} \\
&= \mathcal{F}(\Delta).
\end{aligned}$$

□

Proposizione 4.3. *Sia $\mathcal{F}$ un sistema localizzante non banale di un dominio d'integrità R.*

(a) Le seguenti proprietà sono equivalenti:

(i) $\mathcal{F}$ è un sistema localizzante spettrale;

(ii) $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{sp}$;

(iii) $\forall$ ideale I di R, con $I \notin \mathcal{F}$, esiste un ideale primo P di R tale che $I \subseteq P$ e $P \notin \mathcal{F}$.

(b) Le seguenti proprietà sono equivalenti:

(i) $\mathcal{F}$ è un sistema localizzante di tipo finito;

(ii) esiste un sottospazio quasi-compatto Δ di $\mathrm{Spec}(R)$ tale che $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\Delta)$;

(iii) $\Phi_{max} = \{P \in \mathrm{Spec}(R) : P \notin \mathcal{F}$ ed è massimale rispetto a questa proprietà $\}$ è quasi-compatto e $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\Phi_{max})$.

Dimostrazione. [8, (5.1f), e Proposizioni 5.1.7 e 5.1.8]. □

Corollario 4.4. *(a) Se $\star$ è un' operazione semistar spettrale, allora $\mathcal{F}^\star$ è un sistema localizzante spettrale.*

(b) Se $\mathcal{F}$ è un sistema localizzante spettrale, allora $\star_\mathcal{F}$ è un'operazione semistar spettrale.

Dimostrazione. È una conseguenza del Lemma 4.2. □

Osservazione 4.5. Se Δ è un sottoinsieme non vuoto di ideali primi di un dominio d'integrità R e se

$$\Delta^{\downarrow} = \{Q \in \mathrm{Spec}(R) : Q \subseteq P, \exists P \in \Delta\},$$

allora si vede facilmente che $\forall \Lambda$ tale che $\Delta \subseteq \Lambda \subseteq \Delta^{\downarrow}$, $\mathcal{F}(\Delta) = \mathcal{F}(\Lambda)$. In particolare, dal Lemma 4.2, $\star_{\Delta} = \star_{\Delta^{\downarrow}}$. Inoltre, se Δ_{max} è l'insieme degli elementi massimali di Δ e se $\forall P \in \Delta$ esiste $Q \in \Delta_{max}$ tale che $P \subseteq Q$, allora $\star_{\Delta} = \star_{\Delta_{max}}$.

Corollario 4.6. *Sia $\star$ l'operazione semistar spettrale definita su un dominio d'integrità R associata ad un sottospazio non vuoto Δ di* $\mathrm{Spec}(R)$. *Sia* $\nabla = \{P \in \mathrm{Spec}(R) : P \notin \mathcal{F}(\Delta)\}$ *e sia ∇_{max} l'insieme degli elementi massimali in ∇. Allora*

(a) $\star_{\Delta} = \star = \star_{\nabla}$.

(b) Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- *(i)* $\star_{\Delta}$ *è un'operazione semistar di tipo finito;*
- *(ii)* $\mathcal{F}(\Delta)$ *è un sistema localizzante di tipo finito;*
- *(iii)* ∇_{max} *è quasi-compatto e* $\star = \star_{\nabla_{max}}$*;*
- *(iv) esiste un sottospazio quasi-compatto F di* $\mathrm{Spec}(R)$ *tale che* $\star_{\Delta} = \star_F$.

Dimostrazione. (a) Segue dal fatto che $\mathcal{F}(\Delta) = \mathcal{F}(\nabla)$ e dal Lemma 4.2.

(b) L'equivalenza (i) $\Leftrightarrow$ (ii) è conseguenza del Lemma 4.2 e della Proposizione 3.2.
(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) Dalla Proposizione 4.3(b), $\mathcal{F}(\Delta)$ è di tipo finito se e solo se $\mathcal{F}(\Delta) = \mathcal{F}(\Delta_{max})$ e Δ_{max} è quasi-compatto. La conclusione segue dal Lemma 4.2.
(iii) $\Rightarrow$ (iv) Banale.
(iv) $\Rightarrow$ (ii) Dal Lemma 4.2 sappiamo che se $\star_{\Delta} = \star_F$, allora $\star_{\mathcal{F}(\Delta)} = \star_{\mathcal{F}(F)}$; quindi $\mathcal{F}(\Delta) = \mathcal{F}(F)$ (Teorema 2.10(a)). La conclusione segue dalla Proposizione 4.3(b).

□

Osservazione 4.7. Notiamo che $\star_{\Delta}$ è un'operazione semistar di tipo finito, a condizione che la rappresentazione $R^{\star_{\Delta}} = \cap\{R_P : P \in \Delta\}$ sia localmente finita; quindi ogni elemento non nullo $z \in R^{\star_{\Delta}}$ è un'unità in quasi tutti gli R_P, $P \in \Delta$. Questa condizione implica che Δ è quasi-compatto. Per vedere questo, sia $\{y_{\lambda} : \lambda \in \Lambda\}$ una famiglia di elementi di R tali che $\Delta \subseteq \cup_{\lambda \in \Lambda} D(y_{\lambda})$. Per ipotesi, dato $y_{\overline{\lambda}}$, esiste al più un insieme finito $\{P_1, \ldots,$

$P_t\} \subseteq \Delta$ tale che $\Delta - \{P_1, \ldots, P_t\} \subseteq D(y_{\overline{\lambda}})$. Se $P_i \in D(y_i)$ per $1 \leq i \leq t$, allora chiaramente $\Delta \subseteq D(y_{\overline{\lambda}}) \cup D(y_1) \cup \ldots \cup D(y_t)$.

Nel caso in cui $R = R^{\star_\Delta} = \cap\{R_P : P \in \Delta\}$ è localmente finito si dimostra che $\star_\Delta$ definisce su R un'operazione star di tipo finito.

Come abbiamo fatto per i sistemi localizzanti, possiamo provare ad associare ad ogni operazione semistar un'operazione semistar spettrale.

Data un'operazione semistar $\star$ definita su un dominio d'integrità R, consideriamo l'insieme

$$\Pi^\star = \{P \in \mathrm{Spec}(R) : P \neq 0 \text{ e } P^\star \cap R \neq R\}.$$

Se $\Pi^\star$ non è vuoto, possiamo considerare l'operazione semistar spettrale

$$\star_{sp} = \star_{\Pi^\star}$$

chiamata *operazione semistar spettrale associata a* $\star$.
Dal Lemma 4.2, $\mathcal{F}^{\star_{sp}} = \mathcal{F}(\Pi^\star)$.
È facile vedere che:

$$\star_1 \leq \star_2 \Rightarrow \Pi^{\star_2} \subseteq \Pi^{\star_1} \Rightarrow (\star_1)_{sp} \leq (\star_2)_{sp};$$

in particolare, $(\overline{\star})_{sp} \leq \star_{sp}$.

Il nostro prossimo obiettivo è studiare la relazione tra $\star$ e $\star_{sp}$.

Proposizione 4.8. *Sia $\star$ un'operazione semistar definita su un dominio d'integrità R. Assumiamo che $\Pi^\star \neq \emptyset$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) $\star_{sp} \leq \star$*;*

(ii) $\star$ *è quasi-spettrale;*

(iii) $E^\star = \cap\{E^\star R_P : P \in \Pi^\star\}$, $\forall E \in \overline{\mathbf{F}}(R)$.

Dimostrazione. (i)$\Rightarrow$(ii) Supponiamo che $\forall$ ideale I di R, con $I^\star \cap R \neq R$, abbiamo che $I \nsubseteq P$, $\forall P \in \Pi^\star$. Allora $IR_P = R_P$, $\forall P \in \Pi^\star$. Quindi $I^{\star_{sp}} = \cap\{IR_P : P \in \Pi^\star\} = \cap\{R_P : P \in \Pi^\star\} = R^{\star_{sp}}$. Per ipotesi $I^{\star_{sp}} \subseteq I^\star$, quindi $I^\star \cap R = R$, che è una contraddizione.

(ii)⇒(iii) $\forall P \in \Pi^\star$, sia $z = xy^{-1} \in E^\star R_P$, con $x \in E^\star$ e $y \in R - P$. Di conseguenza $z^{-1}E^\star \cap R \nsubseteq P$, poiché $y \in z^{-1}E^\star \cap R$. Inoltre, è facile vedere che $J = z^{-1}E^\star \cap R$ è un ideale semistar di R; quindi $J^\star = J$. Questo porta ad una contraddizione, poiché $\star$ è quasi-spettrale.

(iii)⇒(i) Segue da $E^{\star_{sp}} = \cap\{ER_P : P \in \Pi^\star\}$, $\forall E \in \overline{\mathbf{F}}(R)$. □

Osservazione 4.9. Se $\star$ un'operazione semistar quasi-spettrale definita su un dominio d'integrità R tale che $R^\star$ non è un campo, allora $\Pi^{star} \neq \emptyset$. Per vederlo scegliamo $x \in R$ che non sia un'unità di $R^\star$. Allora $xR^\star \cap R \neq R$, quindi esiste un ideale primo $P \in R$ con $P^\star \cap R = P$ (quindi $P \in \Pi^\star$) e $xR^\star \cap R \subseteq P$.

Corollario 4.10. *Sia $\star$ un'operazione semistar definita su un dominio d'integrità R. Allora $\star$ è spettrale se e solo se $\star = \star_{sp}$.*

Dimostrazione. Ovviamente se $\star = \star_{sp}$, allora $\star$ è spettrale.

Viceversa, se $\star = \star_\Delta$, per qualche $\Delta \subseteq \text{Spec}(R)$, allora per il Lemma 4.2, $\star_\Delta = \star_{\mathcal{F}(\Delta)}$ e $\star_{sp} = \star_{\mathcal{F}(\Pi^\star)}$. È facile vedere che $\Delta \subseteq \Pi^\star$, da cui $\mathcal{F}(\Pi^\star) \subseteq \mathcal{F}(\Delta)$. Sia $I \notin \mathcal{F}(\Pi^\star)$, allora $I \subseteq P$, $\exists\, P \in \Pi^\star$. Quindi, $I \subseteq I^\star \cap R \subseteq P^\star \cap R \subsetneq R$. Vogliamo che $I \notin \mathcal{F}(\Delta)$. Se $I \in \mathcal{F}(\Delta)$, allora $\forall Q \in \Delta$, $I \nsubseteq Q$ e quindi $IR_Q = R_Q$. Di conseguenza $I^\star = I^{\star_\Delta} = R^{\star_\Delta}$ e quindi $I^\star \cap R = R$, che è una contraddizione. Dalla prima considerazione abbiamo che $\mathcal{F}(\Pi^\star) = \mathcal{F}(\Delta)$ e quindi $\star_{\mathcal{F}(\Pi^\star)} = \star_{\mathcal{F}(\Delta)}$. □

Ricordiamo che data un'operazione semistar $\star$ di R, abbiamo introdotto i seguenti sistemi localizzanti su R associati a $\star$:

$$\mathcal{F}^\star = \{I : I \text{ ideale di } R \text{ con } I \neq 0 \text{ e } I^\star \cap R = R\}$$

e quando $\Pi^\star \neq \emptyset$,

$$\mathcal{F}(\Pi^\star) = \{I : I \text{ ideale di } R \text{ con } I \nsubseteq P, \forall P \in \Pi^\star\}.$$

Le operazioni semistar associate a questi sistemi localizzanti sono, rispettivamente, $\bar{\star}$ e $\star_{sp}$.

Proposizione 4.11. *Sia $\star$ un'operazione semistar definita su un dominio d'integrità R. Se $\Pi^\star \neq \emptyset$, allora:*

(a) $\mathcal{F}^\star \subseteq \mathcal{F}(\Pi^\star)$ *e* $(\mathcal{F}^\star)_{sp} = \mathcal{F}^{\star_{sp}}$*;*

(b) $\overline{\star} \leq \star_{sp}$*;*

(c) se $\star$ *è spettrale, allora* $\mathcal{F}^\star = \mathcal{F}(\Pi^\star)$ *(e quindi* $\overline{\star} = \star_{sp}$*).*

Dimostrazione. (a) Se $I \in \mathcal{F}^\star$, allora $I^\star \cap R = R$. Quindi $\forall P \in \Pi^\star$, $I^\star \nsubseteq P^\star$ e di conseguenza $I \nsubseteq P$; ossia, $I \in \mathcal{F}(\Pi^\star)$. Notiamo che $\mathcal{F}^{\star_{sp}} = \mathcal{F}^{\star_{\Pi^\star}} = \mathcal{F}^{\star_{\mathcal{F}(\Pi^\star)}} = \mathcal{F}(\Pi^\star)$ (Lemma 4.2) e $(\mathcal{F}^\star)_{sp} = \mathcal{F}(\Phi^\star)$, dove

$$\Phi^\star = \{P \in \mathrm{Spec}(R) : P \notin \mathcal{F}^\star\}.$$

Ovviamente $\Pi^\star \subseteq \Phi^\star$, quindi $(\mathcal{F}^\star)_{sp} \subseteq \mathcal{F}^{\star_{sp}}$. Se $I \notin \mathcal{F}(\Phi^\star) = (\mathcal{F}^\star)_{sp}$, allora $I \subseteq Q$ per qualche ideale primo $Q \notin \mathcal{F}^\star$, quindi $Q^\star \cap R \neq R$ e $Q \in \Pi^\star$. Concludiamo che $I \notin \mathcal{F}(\Pi^\star) = \mathcal{F}^{\star_{sp}}$ e quindi $(\mathcal{F}^\star)_{sp} = \mathcal{F}^{\star_{sp}}$.

(b) Segue da (a) perché $\overline{\star} = \star_{\mathcal{F}^\star}$ e $\star_{sp} = \star_{\mathcal{F}(\Pi^\star)}$.

(c) Dal Corollario 4.10 sappiamo che $\star$ è spettrale se e solo se $star = \star_{sp}$, e quindi $\mathcal{F}^\star = \mathcal{F}^{\star_{sp}} = \mathcal{F}(\Pi^\star)$.

□

Osserviamo che il viceversa della Proposizione 4.11(c) non vale in generale.

Teorema 4.12. *Sia* $\star$ *un'operazione semistar definita su un dominio d'integrità* R *e sia* $\Pi^\star \neq \emptyset$*.*

(a) $\star_{sp} = \overline{(\star_{sp})}$*.*

(b) Le seguenti proprietà sono equivalenti:

(i) $\star$ *è quasi-spettrale;*

(ii) $\star_{sp} = \overline{\star}$*;*

(iii) $\overline{\star}$ *è spettrale;*

(iv) $\mathcal{F}^\star = \mathcal{F}(\Pi^\star)$*;*

(v) $\mathcal{F}^\star$ *è spettrale.*

(c) L'operazione semistar $\star$ *è spettrale se e solo se è quasi-spettrale e stabile.*

Dimostrazione. (a) Segue dal fatto che $\star_{sp} = \star_{\mathcal{F}(\Pi^\star)}$ e dalle Proposizioni 2.4 e 3.9(a) .

(b) (i)$\Rightarrow$(ii) Se $\star$ è quasi-spettrale, allora la Proposizione 4.8 implica che $\star_{sp} \leq \star$. D'altra parte per la Proposizione 4.11(b) sappiamo che $\overline{\star} \leq \star_{sp}$. Usando (a) abbiamo che $\star_{sp} = \overline{(\star_{sp})} \leq \overline{\star} \leq \star_{sp}$.
(ii)$\Rightarrow$(iii) e (iv)$\Rightarrow$(v) sono banali.
(ii)$\Rightarrow$(iv) Poiché $\star_{sp} = \overline{\star}$, per la Proposizione 3.9, il Lemma 4.2 e il Teorema 2.10(a), $\mathcal{F}^{\star} = \mathcal{F}^{\overline{\star}} = \mathcal{F}^{\star_{sp}} = \mathcal{F}^{\star_{\mathcal{F}(\Pi^\star)}} = \mathcal{F}(\Pi^{\star})$.
(v)$\Rightarrow$(iii) Segue dal Lemma 4.2.
(iii)$\Rightarrow$(i) Sia I un ideale intero di R tale che $I^{\star} \cap R \neq R$. Dalle proposizioni 3.9 e 4.11(c), $\mathcal{F}^{\star} = \mathcal{F}^{\overline{\star}} = \mathcal{F}(\Pi^{\overline{\star}})$. Poiché $\mathcal{F}^{\star}$ e $\mathcal{F}^{\overline{\star}}$ sono spettrali, la Proposizione 4.3(a) implica che $\mathcal{F}^{\star} = \mathcal{F}^{\overline{\star}} = \mathcal{F}(\Phi^{\star})$, dove $\Phi^{\star} = \{P \in \mathrm{Spec}(R) : P \notin \mathcal{F}^{\star}\}$. Poiché $I \notin \mathcal{F}^{\star} = \mathcal{F}(\Phi^{\star})$, esiste $P \in \Phi^{\star}$ con $I \subseteq P$. Siccome $P \notin \mathcal{F}^{\star}$, $P^{\star} \cap R \neq R$ e quindi $P \in \Pi^{\star}$. Perciò $\star$ è quasi-spettrale.

(c) Dal Lemma 4.1((c) ed (e)) $\star$ è quasi-spettrale e stabile. Viceversa, per (b) e la Proposizione 3.9, $\star = \overline{\star} = \star_{sp}$. La conclusione segue dal Corollario 4.10.

$\square$

Corollario 4.13. *(a) Sia $\mathcal{F}$ un sistema localizzante non banale definito su un dominio d'integrità R, allora $(\star_{\mathcal{F}})_{sp} = \star_{\mathcal{F}_{sp}}$. In altre parole il seguente diagramma è commutativo.*

$$(sp - \mathbf{LS}) \qquad \begin{array}{ccc} \mathbf{LS}(R) & \xrightarrow{\star} & \mathbf{SStar}(R) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle sp} & & \Big\downarrow{\scriptstyle sp} \\ \mathbf{LS}(R) & \xrightarrow{\star} & \mathbf{SStar}(R) \end{array}$$

(b) Sia $\star$ un'operazione semistar su R tale che $\Pi^{\star} \neq \emptyset$, allora $(\mathcal{F}^{\star})_{sp} = \mathcal{F}^{\star_{sp}}$. In altre parole, il seguente diagramma commuta quando ci restringiamo alle operazioni semistar $\star$, tali che $\Pi^{\star} \neq \emptyset$.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{SStar}(R) \arrow[r, "l"] \arrow[d, "sp"'] & \mathbf{LS}(R) \arrow[d, "sp"] \\
\mathbf{SStar}(R) \arrow[r, "l"] & \mathbf{LS}(R)
\end{tikzcd}
\qquad (sp-\mathbf{SS})
$$

Dimostrazione.

(a) Notiamo che $\Pi^{\star_{\mathcal{F}}} = \{P \in \mathrm{Spec}(R) : P_{\mathcal{F}} \cap R \neq R\} \subseteq \Phi = \{P \in \mathrm{Spec}(R) : P \notin \mathcal{F}\}$, poiché $P \in \mathcal{F}$ se e solo se $P_{\mathcal{F}} = R_{\mathcal{F}}$ (Osservazione 2.5(b)). Viceversa, se $P \in \Phi$, allora $P_{\mathcal{F}} \neq R_{\mathcal{F}}$ e quindi $P \subseteq P_{\mathcal{F}} \cap R \subsetneq R$. Infatti $P_{\mathcal{F}} \cap R = P$; se $x \in (P_{\mathcal{F}} \cap R) - P$, allora $xI \subseteq P$ per qualche $I \in \mathcal{F}$ e quindi $I \subseteq P$, che è una contraddizione. Usando il Lemma 4.2 abbiamo $(\star_{\mathcal{F}})_{sp} = \star_{\Pi^{\star_{\mathcal{F}}}} = \star_{\Phi} = \star_{\mathcal{F}(\Phi)} = \star_{\mathcal{F}^{sp}}$.

(b) Già dimostrato nella Proposizione 4.11(a).

□

Osservazione 4.14. Notiamo che dalla commutatività dei diagrammi ($sp-$ **LS**) e ($sp-$ **SS**) deduciamo che, quando $\Pi^{\star} \neq \emptyset$, $(\bar{\star})_{sp} = \overline{(\star_{sp})}$.

Esempio 4.15. (Un'operazione semistar che non è quasi-spettrale). Sia $(V.M)$ un dominio di valutazione non discreto 1-dimensionale con campo dei quozienti K. Per l'Osservazione 1.1(c) abbiamo che $\overline{\mathbf{F}}(V) \setminus \mathbf{F}(V) = K$, gli ideali nondivisoriali di V sono della forma xM dove $0 \neq x \in K$, e $M^v = V$. Quindi $\Pi^v = \emptyset$. In particolare v non è un'operazione semistar quasi-spettrale su V e $\mathcal{F}^v = \{M, V\}$. Asseriamo che v è stabile. Se $I, J \in \mathbf{F}(V)$, allora esiste $0 \neq d \in V$ tale che $dI \subseteq V$ e $dJ \subseteq V$. Senza perdere di generalità possiamo assumere $dJ \subseteq dI$; quindi $J \subseteq I$. Ovviamente $(I \cap J)^v = J^v = I^v \cap J^v$. Per il Teorema 2.10(b) possiamo dedurre che $\forall\, E \in \overline{\mathbf{F}}(V)$, $E^v = E^{\mathcal{F}^v} = (E : M)$.

Esempio 4.16. (Un'operazione semistar quasi-spettrale che non è stabile). Sia R come nell'esempio 3.13. Se R è essenziale, ma non un $PvMD$, proviamo che $b_f = v_f = t \gneq \bar{t}$, quindi t non è stabile. Tuttavia t è quasi-spettrale. Per vederlo, sia I un ideale di R tale che $I_t \subsetneq R$, allora esiste un t-ideale massimale P di R, che è un ideale primo tale che $I_t \subseteq P_t = P$ e quindi $I \subseteq P$.

Ora vogliamo studiare i seguenti diagrammi:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{LS}(R) & \xrightarrow{sp} & \mathbf{LS}(R) \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \mathbf{LS}(R) & \xrightarrow{sp} & \mathbf{LS}(R) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbf{SStar}(R) & \xrightarrow{sp} & \mathbf{SStar}(R) \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \mathbf{SStar}(R) & \xrightarrow{sp} & \mathbf{SStar}(R) \end{array}$$

In generale questi diagrammi non commutano.

Proposizione 4.17. *Sia $\mathcal{F}$ un sistema localizzante su un dominio R. Allora $(\mathcal{F}_f)_{sp} = \mathcal{F}_f \subseteq (\mathcal{F}_{sp})_f$. Inoltre, $(\mathcal{F}_f)_{sp} = (\mathcal{F}_{sp})_f$ se e solo se per ogni ideale finitamente generato J di R, con $J \notin \mathcal{F}$, esiste un ideale primo P di R tale che $J \subseteq P$ e $P \notin \mathcal{F}$. (Quando $\mathcal{F}$ soddisfa questa proprietà diciamo che $\mathcal{F}$ è* finitamente spettrale*).*

Dimostrazione. Dalla Proposizione 4.3(a) sappiamo che un sistema localizzante di tipo finito è spettrale, quindi $(\mathcal{F}_f)_{sp} = \mathcal{F}_f$. Per la seconda parte, assumiamo che $\mathcal{F}$ sia finitamente spettrale. Sia $I \in (\mathcal{F}_{sp})_f$, allora esiste un ideale finitamente generato $J \subseteq I$ tale che $J \nsubseteq P$, per ogni ideale primo $P \notin \mathcal{F}$. Allora $J \in \mathcal{F}$; infatti se fosse $J \notin \mathcal{F}$ potremmo trovare un ideale primo P di R tale che $J \subseteq P$ e $P \notin \mathcal{F}$, che è una contraddizione. Quindi abbiamo che $J \in \mathcal{F}$, J è finitamente generato e $J \subseteq I$ e possiamo concludere che $I \in \mathcal{F}_f$. Viceversa, se $(\mathcal{F}_{sp})_f = \mathcal{F}_f$, allora $\mathcal{F}$ è finitamente spettrale. Se per assurdo esistesse un ideale finitamente generato J di R con $J \notin \mathcal{F}$, avremmo che $J \nsubseteq P$ per ogni $P \notin \mathcal{F}$; ma allora $J \in (\mathcal{F}_{sp})_f$ con $J \notin \mathcal{F}_f$, che è una contraddizione. □

Corollario 4.18. *Se $\mathcal{F}$ è un sistema localizzante spettrale su un dominio d'integrità R, allora $(\mathcal{F}_f)_{sp} = \mathcal{F}_f = (\mathcal{F}_{sp})_f$.*

Esempio 4.19. (Un sistema localizzante non finitamente spettrale). Siano V, P e $\hat{\mathcal{F}}(P)$ come nell'Esempio 2.2. Supponiamo che P sia ideale massimale di V. Per semplicità, denotiamo con $\mathcal{F}$ il sistema localizzante $\hat{\mathcal{F}}(P)$.

Supponiamo che P sia idempotente e ramificato e poniamo $P_0 = \cap_{n\geq 1} H^n$, dove H è un ideale P-primario, $H \neq P$. Allora, $\mathcal{F} = \{V,\ P\}$, $\mathcal{F}_f = \{V\}$ e $\mathcal{F}_{sp} = \mathcal{F}(P_0) = \{I : I \text{ ideale di } V,\ P_0 \subsetneq I\}$. Dunque $\mathcal{F}$ non è finitamente spettrale, infatti $(\mathcal{F}_{sp})_f = \mathcal{F}_{sp} \supsetneq \mathcal{F}_f = \mathcal{F}(P) = (\mathcal{F}_f)_{sp}$. Se P non è ramificato, allora $\mathcal{F}$ è spettrale perché $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{sp} = \cap\{\mathcal{F}(Q) : Q \in \mathrm{Spec}(R),\ Q \subsetneq P\} = \{V,\ P\}$. In questo caso abbiamo $\mathcal{F}(P) = (\mathcal{F}_f)_{sp} = \mathcal{F}_f = (\mathcal{F}_{sp})_f \subsetneq \mathcal{F} = \mathcal{F}_{sp}$.

Vogliamo esaminare il diagramma

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{SStar}(R) \arrow[r, "sp"] \arrow[d, "f"'] & \mathbf{LS}(R) \arrow[d, "f"] \\
\mathbf{SStar}(R) \arrow[r, "sp"] & \mathbf{LS}(R)
\end{tikzcd}$$

Iniziamo dal seguente risultato:

Lemma 4.20. *Sia $\star$ un'operazione semistar di tipo finito definita su un dominio d'integrità R, con $R^\star \neq K$, dove K è il campo dei quozienti di R. Se I è un ideale intero semistar proprio di R (ossia $0 \neq I^\star \cap R = I \subsetneq R$), allora I è contenuto in un ideale intero semistar massimale proprio di R. Inoltre, un ideale semistar massimale proprio di R è un ideale primo.*

Dimostrazione. L'insieme degli ideali interi semistar propri di R è non vuoto e induttivo. Ad esempio, se x è un elemento non nullo di R e non è un'unità di $R^\star$, allora $xR^\star \cap R$ è un ideale semistar proprio di R. Sia $\{I_\alpha : \alpha \in A\}$ una catena di ideali interi semistar propri di R. Allora $(\cup_{\alpha\in A} I_\alpha)^\star \supseteq \cup_{\alpha\in A} I_\alpha^\star$. D'altra parte, poiché $\star$ è di tipo finito, se $x \in (\cup_{\alpha\in A} I_\alpha)^\star$ allora $x \in J^\star$, per qualche $J \in \mathbf{f}(R)$, con $J \subseteq \cup_{\alpha\in A} I_\alpha$. Chiaramente $J \subseteq I_\alpha$ per qualche $\alpha \in A$. Quindi $x \in J^\star \subseteq I_\alpha^\star \subseteq \cup_{\alpha\in A} I^\star$. Dunque

$$(\cup_{\alpha\in A} I_\alpha)^\star \cap R = (\cup_{\alpha\in A} I_\alpha^\star) \cap R = \cup_{\alpha\in A}(I_\alpha^\star \cap R) = \cup_{\alpha\in A} I_\alpha.$$

Per il Lemma di Zorn possiamo dedurre che ogni ideale intero semistar proprio I di R è contenuto in un ideale intero semistar massimale proprio Q di R. Per dimostrare che Q è un ideale primo di R, prendiamo $x, y \in R \setminus Q$ e supponiamo che $xy \in Q$. Per la massimalità di Q, $(Q, x)^\star = R^\star$. Poiché $\star$ è di tipo finito possiamo trovare un ideale finitamente generato $J \subseteq Q$ tale che $(J, x)^\star = R^\star$. Consideriamo l'ideale $y(J, x) = (yJ, yx)$. Allora $y(J, x) \subseteq Q$, quindi $y \in yR^\star \cap R \subseteq y(J,x)^\star \cap R = (yJ, yx)^\star \cap R \subseteq Q^\star \cap R = Q$, che è una contraddizione. □

Corollario 4.21. *Un'operazione semistar di tipo finito è quasi-spettrale.*

Osservazione 4.22. Se $\star$ è un'operazione semistar di tipo finito e se

$$\mathcal{L} = \{E \in \overline{\mathbf{F}}(R) : E^\star \subsetneq R^\star\}$$

allora si dimostra facilmente che ogni elemento $E \in \mathcal{L}$ è contenuto in un elemento massimale di $\mathcal{L}$. Inoltre ogni elemento N di $\mathcal{L}$ è tale che $N = N^\star$ ed è un ideale primo di $R^\star$.
Se I è un ideale non nullo di R, con $I \notin \mathcal{F}^\star$, allora $I^\star \cap R \neq R$ e quindi $I \in \mathcal{L}$. È immediato:

$$\begin{aligned}\Pi^\star_{max} = \{M : M \notin \mathcal{F}^\star & \text{ dove } M \text{ è un ideale di } R \text{ ed è massimale}\\ & \text{rispetto a questa proprietà}\}\\ = \{N \cap R &: N \in \mathcal{L} \text{ e } N \text{ è massimale in } \mathcal{L}\}.\end{aligned}$$

Proposizione 4.23. *Sia $\star$ un'operazione semistar definita su un dominio d'integrità e sia $\Pi^\star \neq \emptyset$.*

(a) $(\star_f)_{sp} = \overline{(\star_f)} \leq \star_f$ *e quindi* $((\star_f)_{sp})_f = (\star_f)_{sp}$.

(b) Le seguenti condizioni sono equivalenti:

  (i) $(\star_f)_{sp} = \star_f$*;*

  (ii) $\star_f$ *è stabile;*

  (iii) $\star_f$ *è spettrale.*

Dimostrazione. (a) Dal Corollario 4.21 sappiamo che $\star_f$ è quasi-spettrale e quindi $(\star_f)_{sp} = \overline{(\star_f)}$ (Teorema 4.12(b)). Inoltre, $\overline{(\star_f)} \leq \star_f$ per il Teorema 2.10(b). Poiché $\overline{(\star_f)} = \tilde{\star}$ è di tipo finito, per la Proposizione 3.8 $(\overline{(\star_f)})_f = \overline{(\star_f)}$.

(b) Segue da (a), dalla Proposizione 3.9(a) e dal Teorema 4.12(c).

□

Proposizione 4.24. *Sia $\star$ un'operazione semistar definita su un dominio d'integrità R. Sia $\Pi^\star \neq \emptyset$. Allora:*

(a) $(\overline{\star})_f \leq (\star_{sp})_f$*, quindi* $(\star_f)_{sp} \leq (\star_{sp})_f$*;*

(b) *Se $\star$ è quasi-spettrale, allora* $(\overline{\star})_f = (\star_{sp})_f$*;*

(c) $(\star_f)_{sp} = (\star_{sp})_f \Leftrightarrow (\mathcal{F}^\star)_f = \mathcal{F}(\Pi^\star)_f$ *e* $(\star_{sp})_f$ *è stabile.*

Dimostrazione. (a) Notiamo che $\overline{\star} \leq \star_{sp}$ per la Proposizione 4.11(b), quindi $(\overline{\star})_f \leq (\star_{sp})_f$. Per la Proposizione 4.23, sappiamo che $(\star_f)_{sp} = \overline{(\star_f)}$. Poiché $\overline{(\star_f)} \leq (\overline{\star})_f$ (Proposizione 3.8), possiamo concludere che $(\star_f)_{sp} \leq (\star_{sp})_f$.

(b) Per il Teorema 4.12(b) , se $\star$ è quasi-spettrale allora $\overline{\star} = \star_{sp}$, che implica la conclusione.

(c) Poiché $(\star_f)_{sp} = \overline{(\star_f)}$, la Proposizione 3.9(b) e il Corollario 3.10 implicano che $\mathcal{F}^{(\star_f)_{sp}} = \mathcal{F}^{\overline{(\star_f)}} = \mathcal{F}^{\star_f} = (\mathcal{F}^\star)_f$. D'altra parte, poiché per il Lemma 4.2 $\mathcal{F}^{\star_{sp}} = \mathcal{F}(\Pi^\star)$,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{(\star_{sp})_f} &= \{I : I \text{ è un ideale di } R \text{ tale che } I \supseteq J \text{ con } J \\ &\qquad \text{finitamente generato e } J \in \mathcal{F}^{\star_{sp}} = \mathcal{F}(\Pi^\star)\} \\ &= \mathcal{F}(\Pi^\star)_f.\end{aligned}$$

Chiaramente $(\star_f)_{sp} = (\star_{sp})_f$ implica che $(\mathcal{F}^\star)_f = (\mathcal{F}(\Pi^\star))_f$ e che $(\star_{sp})_f$ è stabile, poiché è spettrale (Teorema 4.12(c) e Corollario 4.10). Il viceversa segue dal Teorema 2.10 e dal fatto che un'operazione semistar spettrale è stabile.

□

Sia $\star$ un'operazione semistar definita su un dominio d'integrità R. Un ideale I di R è $\star$ *-invertibile* se esiste un ideale J di R tale che $(IJ)^\star = R^\star$.

Proposizione 4.25. *Sia $\star$ un'operazione semistar quasi-spettrale definita su un dominio d'integrità R e sia I un ideale di R. Allora I è $\star$ -invertibile se e solo se I è $\overline{\star}$ -invertibile. In particolare, se $\mathcal{F}^\star = \{R\}$, allora I è $\star$ -invertibile se e solo se I è invertibile.*

Dimostrazione. Poiché $\star$ è quasi-spettrale, per la Proposizione 3.9(b) e il Teorema 4.12(b) $\mathcal{F}^\star = \mathcal{F}^{\overline{\star}} = \mathcal{F}(\Pi^\star)$.

($\Rightarrow$) Supponiamo che $(IJ)^\star = R^\star$ e $(IJ)^{\overline{\star}} \subsetneq R^{\overline{\star}}$. Allora $IJ \subseteq P$ per qualche $P \in \Pi^\star$. Quindi $(IJ)^\star \subseteq P^\star \subsetneq R^\star$, che è una contraddizione.

($\Leftarrow$) Poiché $(IJ)^{\overline{\star}} = R^{\overline{\star}}$ per qualche ideale J di R e $\overline{\star} \leq \star$, allora necessariamente $1 \in (IJ)^\star$; ossia, $(IJ)^\star = R^\star$. Per dimostrare l'ultima affermazione, notiamo che se $\mathcal{F}^\star = \{R\}$, allora $E^{\overline{\star}} = E_{\mathcal{F}^\star} = E$, $\forall E \in \overline{\mathbf{F}}(R)$. □

Poniamo $\mathrm{Inv}^{\star}(R) := \{I : I$ è un ideale di R ed è $\star$ -invertibile$\}$. È facile vedere che $\mathrm{Inv}^{\star}(R)$ forma un gruppo con l'operazione prodotto definita da $I \cdot J = (IJ)^{\star}$. Il sottoinsieme $\mathrm{Princ}(R) = \{xR : x \in K,\ x \neq 0\}$ è un sottogruppo di $\mathrm{Inv}^{\star}(R)$, e il gruppo quoziente $\mathrm{Cl}^{\star}(R) = \mathrm{Inv}^{\star}(R)/\mathrm{Princ}(R)$ è chiamato il *gruppo delle $\star$-classi di R*.

Corollario 4.26. *Se $\star$ è un'operazione semistar di un dominio d'integrità R, allora* $\mathrm{Cl}^{\star_f}(R) = \mathrm{Cl}^{\tilde{\star}}(R)$. *In particolare* $\mathrm{Cl}^{t}(R) = \mathrm{Cl}^{\tilde{v}}(R)$.

Dimostrazione. Notiamo che $\star_f$ è un'operazione semistar quasi-spettrale su R e $\overline{(\star_f)} = \tilde{\star}$; quindi applichiamo la Proposizione 4.25. La seconda parte del Corollario si ottiene dalla prima, quando $\star = v$. $\square$

Capitolo 5

Spazi di Operazioni Semistar

Dato un dominio d'integrità R con campo dei quozienti K l'insieme $\mathbf{SStar}(R)$ è dotato di una topologia (detta *Topologia di Zariski*), con una base di aperti della forma

$$V_E := \{\star \in \mathbf{SStar}(R) : 1 \in E^\star\},$$

per ogni $E \in \overline{\mathbf{F}}(R)$. Con questa topologia si dimostra che $\mathbf{SStar}(R)$ è uno spazio quasi-compatto, T_0. In particolare, $\mathbf{SStar}(R)$ non è mai T_1 (né T_2), a meno che $R = K$.
Definiamo $U_E := V_E \cap \mathbf{SStar}_f(R)$, con E un ideale frazionario finitamente generato di R.

Sia $\mathbf{Overr}(R)$ l'insieme dei sopra-anelli di R. Questo insieme è dotato della topologia di Zariski una cui base di aperti sono della forma

$$B_E := \{C \in \mathbf{Overr}(R) : E \subseteq C\},$$

dove E è un ideale frazionario finitamente generato di R.

Dato $T \in \mathbf{Overr}(R)$ definiamo $\wedge_{\{T\}}$ la mappa $\wedge_{\{T\}} : \overline{\mathbf{F}}(R) \to \overline{\mathbf{F}}(R)$ definita da $E^{\wedge_{\{T\}}} := ET$, per ogni $E \in \overline{\mathbf{F}}(R)$.
L'estremo inferiore $\wedge(\mathcal{S})$ di una famiglia non vuota $\mathcal{S}$ di operazioni semistar di R si può scrivere esplicitamente come segue:

$$E^{\wedge(\mathcal{S})} = \bigcap\{E^\star : \star \in \mathcal{S}\}, \forall E \in \overline{\mathbf{F}}(R).$$

In particolare, data $\mathcal{T}$ una famiglia non vuota di sopra-anelli di R, allora l'estremo inferiore della famiglia di operazioni semistar $\{\wedge_{\{T\}} : T \in \mathcal{T}\}$ è denotato con $\wedge_{\mathcal{T}}$.
D'altra parte, non c'è una formula esplicita per l'estremo superiore $\vee(\mathcal{S}) := \wedge(\{\sigma \in \mathbf{SStar}(R) : \star \leq \sigma, \forall \star \in \mathcal{S}\})$, sebbene, se $\mathcal{S} \subseteq \mathbf{SStar}_f(R)$, allora

$$E^{\vee(\mathcal{S})} = \bigcup\{E^{\star_1 \circ \cdots \circ \star_n} : \star_1, \ldots, \star_n \in \mathcal{S}\}$$

dove con $\star_1 \circ \cdots \circ \star_n$ indichiamo la classica composizione di funzioni applicata alle operazioni semistar $\star_1, \ldots \star_n$, che si dimostra essere a sua volta un'operazione semistar.

Proposizione 5.1. *Sia R un dominio d'integrità. Siano $\mathbf{Overr}(R)$ e $\mathbf{SStar}_f(R)$ dotati delle rispettive topologie di Zariski e sia $\iota : \mathbf{Overr}(R) \to \mathbf{SStar}_f(R)$ l'applicazione iniettiva definita da $\iota(T) := \wedge_{\{T\}}$, per ogni $T \in \mathbf{Overr}(R)$. Allora valgono le seguenti affermazioni:*

(a) L'applicazione ι è un'immersione topologica;

(b) L'applicazione $\pi : \mathbf{SStar}_f(R) \to \mathbf{Overr}(R)$, definita da $\pi(\star) = R^\star$, per ogni $\star \in \mathbf{SStar}_f(R)$, è una suriezione continua tale che $\pi \circ \iota$ è l'identità di $\mathbf{Overr}(R)$. In altre parole, π è una retrazione.

Dimostrazione. (a) Iniziamo col mostrare che ι è continua, e questo basterà per dimostrare che per ogni ideale frazionario finitamente generato E di R, l'insieme $\iota^{-1}(U_E)$ è aperto in $\mathbf{Overr}(R)$. Da

$$T \in \iota^{-1}(U_E) \Leftrightarrow \wedge_{\{T\}} \in U_E \Leftrightarrow 1 \in E^{\wedge_{\{T\}}} \Leftrightarrow 1 \in ET,$$

abbiamo $\iota^{-1}(U_E) = \{T \in \mathbf{Overr}(R) : 1 \in ET\}$. Fissiamo un anello $T \in \iota^{-1}(U_E)$. Allora esistono $t_1, \ldots, t_n \in T, e_1, \ldots, e_n \in E$ tali che $1 = t_1e_1 + \cdots + t_ne_n$. Quindi $1 \in EC$, per ogni $C \in B_{\{t_1,\ldots,t_n\}}$, e quindi $C \in \iota^{-1}(U_E)$. Dunque $B_{\{t_1,\ldots,t_n\}}$ è un intorno aperto di T contenuto in $\iota^{-1}(U_E)$, quindi è aperto.
Infine mostriamo che l'immagine di ι di un insieme aperto $V \in \mathbf{Overr}(R)$ è aperta in $\iota(\mathbf{Overr}(R))$ (dotato della topologia indotta). Senza perdita di generalità, possiamo assumere $V = B_E$, per qualche insieme finito $E := \{e_1, \ldots, e_n\}$ di K^*. Innanzi tutto consideriamo l'insieme aperto

$U := \bigcap_{i=1}^{n} U_{e_i^{-1}}$ di $\mathbf{SStar}_f(R)$. Se $\star \in \iota(B_E)$, allora $\star = \wedge_{\{C\}}$, per qualche $C \supseteq E$; quindi $e_i \in C$ per ogni i e $1 \in e_i^{-1}C$, ossia, $1 \in (e_i^{-1})^{\wedge_{\{C\}}}$. Quindi abbiamo $\iota(B_E) \subseteq U \cap \iota(\mathbf{Overr}(R))$.
Viceversa, se $\star \in U \cap \iota(\mathbf{Overr}(R))$, allora $\star = \wedge_{\{C\}}$ e $1 \in (e_i^{-1})^{\wedge_{\{C\}}}$ per ogni i; questo segue dal fatto che $e_i \in C$ per ogni i, e quindi $C \in B_E$. L'uguaglianza $\iota(B_E) = U \cap \iota(\mathbf{Overr}(R))$ mostra che $\iota(B_E)$ è aperto in $\iota(\mathbf{Overr}(R))$.

(b) Segue dal fatto che per ogni sottoinsieme aperto del tipo $A_x := \mathbf{Overr}(R[x])$ di $\mathbf{Overr}(R)$, abbiamo che $\pi^{-1}(A_x) = \{\star \in \mathbf{SStar}_f(R) : R[x] \subseteq R^\star\} = \{\star \in \mathbf{SStar}_f(R) : 1 \subseteq (x^{-1}R)^\star\} = V_{x^{-1}R}$.

□

Proposizione 5.2. *Sia R un dominio d'integrità e sia $\mathcal{S}$ un sottospazio quasi-compatto di $\mathbf{SStar}_f(R)$. Allora, $\wedge(\mathcal{S})$ è di tipo finito.*

Dimostrazione. Poniamo $\mathcal{S} := \{\star_i : i \in I\}$ e $\star := \wedge(\mathcal{S})$. Fissiamo un R-sottomodulo E di K e sia $x \in E^\star$. Poiché $E^\star = \bigcap_{i\in I} E^{\star_i}$ e ogni $\star_i$ è di tipo finito, esistono ideali finitamente generati $G_i \subseteq E$ tali che $x \in G_i^{\star_i}$; quindi, per ogni i, $1 \in x^{-1}G_i^{\star_i} = (x^{-1}G_i)^{\star_i}$ e $\star_i \in U_{x^{-1}G_i} =: \Omega_i$. Di conseguenza $\{\Omega_i : i \in I\}$ è un ricoprimento aperto di $\mathcal{S}$, e, per la quasi-compattezza, ammette un sottoricoprimento finito $\{\Omega_{i_1}, \dots, \Omega_{i_n}\}$. Poniamo $G := G_{i_1} + \cdots + G_{i_n} \subseteq E$. Per ogni $i \in I$ esiste almeno un Ω_{j_i} tale che $\star_i \in \Omega_{j_i}$; quindi $\star_i \in U_{x^{-1}G_{j_i}}$ e $1 \in (x^{-1}G_{j_i})^{\star_i}$, ossia $x \in G_{j_i}^{\star_i} \subseteq G^{\star_i}$. Quindi $x \in \bigcap_{i\in I} G^{\star_i} = G^\star$, e questo implica che $\star$ è di tipo finito. □

Osservazione 5.3. Sia $\mathcal{S}$ un sottoinsieme di $\mathbf{SStar}(R)$ e $\mathcal{S}_f := \{\star_f : \star \in \mathcal{S}\}$. Consideriamo le seguenti proprietà:

(a) $\mathcal{S}$ è quasi-compatto in $\mathbf{SStar}(R)$;

(b) $\mathcal{S}_f$ è quasi-compatto in $\mathbf{SStar}_f(R)$;

(c) $\wedge(\mathcal{S}_f)$ è un'operazione semistar di tipo finito;

(d) $\wedge(\mathcal{S}_f) = (\wedge(\mathcal{S}))_f$.

Allora (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Leftrightarrow$ (d).

Dimostrazione. (a) $\Rightarrow$ (b) è immediato. (b) $\Rightarrow$ (c) segue dalla Proposizione 5.2. Per dimostrare (c)$\Rightarrow$(d) notiamo che in generale $\wedge(\mathcal{S}_f) \leq \wedge(\mathcal{S})$ e

$(\wedge(\mathcal{S}))_f \leq \wedge(\mathcal{S}_f)$. La conclusione segue dal fatto che, per (c), $(\wedge(\mathcal{S}_f))_f = \wedge(\mathcal{S}_f)$. Infine, (d) $\Rightarrow$ (c) è banale. $\square$

Corollario 5.4. *Siano R un dominio d'integrità e $\mathcal{T}$ un sottospazio quasi-compatto di* **Overr**(R). *Allora $\wedge_{\mathcal{T}}$ è di tipo finito.*

Dimostrazione. Basta applicare le Proposizioni 5.1(a) e 5.2. $\square$

Il seguente esempio mostra che le proprietà di finitezza di un'operazione semistar $\wedge_{\mathcal{T}}$, indotta da una collezione $\mathcal{T}$ di sopra-anelli, non implicano la quasi-compattezza di $\mathcal{T}$.

Esempio 5.5. Siano L un campo e X un'indeterminata su L. Sia $R := L[X^4, X^5, X^6, X^7] = L + X^4L[X]$ e sia $K = L((X))$. Poiché R è Noetheriano ed è un dominio conduttivo (i.e.,$(R : T) \neq (0)$ per ogni $T \in \mathbf{Overr}(R)$ con $T \neq K$), $\overline{\mathbf{F}}(R) = \mathbf{F}(R) \cup \{K\} = \mathbf{f}(R) \cup \{K\}$, e quindi ogni operazione semistar su R è di tipo finito. $\forall \alpha \in K$, consideriamo l'anello $T_\alpha := R[X^2 + \alpha X^3] = L + (X^2 + \alpha X^3)L + X^4L[[X]]$, e, per ogni $A \subseteq L$ sia $\mathcal{T}_A := \{T_\alpha : \alpha \in A\}$. Allora l'operazione semistar $\wedge_{\mathcal{T}_A}$ è di tipo finito. Tuttavia, se A è infinito (ad esempio, se L è infinito e $A = L$), allora $\mathcal{T}_A$ non è quasi-compatto. Infatti, il ricoprimento aperto $\{\mathbf{Overr}(T_\alpha) : \alpha \in A\}$ di $\mathcal{T}_\alpha$ in $\mathbf{Overr}(R)$ non ha sottoricoprimenti finiti, poiché $\mathbf{Overr}(T_\alpha) \cap \mathcal{T}_A = \{T_\alpha\}$.

Il seguente esempio mostra come usare il Corollario 5.4 per stabilire la non quasi-compattezza per alcuni sottospazi di $\mathbf{Overr}(R)$.

Esempio 5.6. Sia R un dominio Noetheriano di dimensione ≥ 2 e sia $\mathcal{R}$ l'insieme dei sopra-anelli di valutazione Noetheriani di R, ossia, l'unione di $\{K\}$ con l'insieme dei sopra-anelli a valutazione discreta di R. Se I è un ideale proprio di R, allora $I^{\wedge_{\mathcal{R}}} = I^b$, dove $b := \wedge_{Zar(R)}$ e $Zar(R) := \{V : V$ è un sopra-anello a valutazione discreta di $R\}$. In particolare, lo stesso vale per ogni $F \in \mathbf{f}(R)$, quindi $(\wedge_{\mathcal{R}})_f = b$. Tuttavia, se $W \in Zar(R) \setminus \mathcal{R}$, allora W è contenuto in un elemento V di $\mathcal{R}$, tale che $WV = V$, mentre $WV' = K$ per ogni $V' \in \mathcal{R}$, $V' \neq V$. Quindi, $W^{\wedge_{\mathcal{R}}} \neq W$, mentre $W^b = W$ e, di conseguenza, $\wedge_{\mathcal{R}} \neq b$. Dunque, $\wedge_{\mathcal{R}}$ non è di tipo finito, e quindi $\mathcal{R}$ non è un sottoinsieme quasi-compatto di **Overr**(R) (o di $Zar(R)$).

Proposizione 5.7. *Sia $\{V_{E_i} : i \in I\}$ una famiglia non vuota di insiemi aperti della topologia di Zariski di* **SStar**(R). *Valgono le seguenti affermazioni:*

(a) $\bigcap\{V_{E_i} : i \in I\}$ *è un reticolo completo (come sottoinsieme dell'insieme parzialmente ordinato* $(\mathbf{SStar}(R),\leq)$*);*

(b) $\bigcap\{V_{E_i} : i \in I\}$ *è un sottospazio compatto di* $\mathbf{SStar}(R)$. *In particolare,* V_E *è compatto per ogni* $E \in \overline{\mathbf{F}}(R)$.

Dimostrazione. (a) Sia $V := \bigcap_{i\in I} V_{E_i}$ e sia Δ un sottoinsieme non vuoto di V. Per [6, Esempio 1.1(e)], $\sharp := \vee(\Delta)$ e $\flat := \wedge(\Delta)$ sono, rispettivamente, l'estremo superiore e l'estremo inferiore di Δ in $\mathbf{SStar}(R)$. Quindi è sufficiente mostrare che $\sharp, \flat \in V$. Ovviamente $\sharp \in V$, perché $\sharp \geq \star, \forall \star \in \Delta$, e quindi $\sharp$ appartiene ad ogni insieme aperto contenente qualche $\star$, per [6, Osservazione 2.2(c)]. Inoltre, per ogni $i \in I$ abbiamo

$$1 \in \bigcap_{\star \in V_{E_i}} E_i^{\star} \subseteq \bigcap_{\star \in V} E_i^{\star} =: E_i^{\flat},$$

e quindi $\flat \in V$.

(b) Sia $\mathcal{U}$ un ricoprimento aperto di V. Per (a), $\flat \in V$, e quindi esiste un insieme aperto $U_0 \in \mathcal{U}$ tale che $\flat \in U_0$. Infine, per [6, Osservazione 2.2(c)], U_0 deve contenere tutto V.

□

Teorema 5.8. *Sia R un dominio d'integrità. Allora* $\mathbf{SStar}_f(R)$ *è uno spazio spettrale.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{U}$ un ultrafiltro su $X := \mathbf{SStar}_f(R)$ e sia $\mathcal{S} := \{U_E : E \in \mathbf{f}(R)\}$ la sottobase canonica della topologia di Zariski. Visto [3, Corollario 3.3] è sufficiente mostrare che l'insieme

$$X_{\mathcal{S}}(\mathcal{U}) := \{\star \in X : \forall U_E \in \mathcal{S}, \star \in U_E \Leftrightarrow U_E \in \mathcal{U}\}$$

è non vuoto. Per le Proposizioni 5.2 e 5.7, ogni operazione semistar della forma $\wedge(U_E)$ (dove $E \in \mathbf{f}(R)$) è di tipo finito. Quindi l'operazione semistar $\star := \vee(\{\wedge(U_E) : U_E \in \mathcal{U}\})$ è di tipo finito. Affermiamo che $\star \in X_{\mathcal{S}}(\mathcal{U})$. Fissiamo un ideale frazionario finitamente generato E di R. È sufficiente mostrare che $\star \in U_E$ se e solo se $U_E \in \mathcal{U}$. Per prima cosa assumiamo che $\star \in U_E$, i.e., $1 \in E^{\star}$. Allora esistono ideali frazionari finitamente generati $E_1, \ldots, E_n$ di R (non necessariamente distinti) tali che $1 \in E^{\wedge(U_{E_1})\circ\cdots\circ\wedge(U_{E_n})}$ e $U_{E_i} \in \mathcal{U}, \forall i = 1, \ldots, n$. Prendiamo un'operazione semistar $\sigma \in \bigcap_{i=1}^{n} U_{E_i}$. Per definizione $\sigma \geq \wedge(U_{E_i}), \forall i = 1, \ldots, n$, e quindi

$$1 \in E^{\wedge(U_{E_1})\circ\cdots\circ\wedge(U_{E_n})} \subseteq E^{\sigma\circ\cdots\circ\sigma} = E^{\sigma},$$

i.e., $\sigma \in U_E$. Questo dimostra che $\bigcap_{i=1}^{n} U_{E_i} \subseteq U_E$ e quindi, dalla definizione di ultrafiltro, $U_E \in \mathcal{U}$, poiché $U_{E_1}, \ldots, U_{E_n} \in \mathcal{U}$. Viceversa, assumiamo che $U_E \in \mathcal{U}$. Questo implica che $\wedge(U_E) \leq \star$. Per definizione, $1 \in E^{\sigma}, \forall \sigma \in U_E$, e quindi

$$1 \in \bigcap_{\sigma \in U_E} E^{\sigma} =: E^{\wedge(U_E)} \subseteq E^{\star}.$$

□

Denotiamo con $\overline{\mathbf{SStar}}(R)$ (rispettivamente, $\widetilde{\mathbf{SStar}}(R)$) il sottoinsieme di $\mathbf{SStar}(R)$ i cui elementi sono tutte le operazioni semistar stabili (rispettivamente, tutte le operazioni semistar stabili di tipo finito).

Osservazione 5.9. (a) Se poniamo $\mathbf{SStar}_{sp}(R) := \{\star \in \mathbf{SStar}(R) : \star$ è spettrale $\}$ (rispettivamente, $\mathbf{SStar}_{f,sp}(R) := \{\star \in \mathbf{SStar}_f(R) : \star$ è spettrale $\}$), allora per il Teorema 4.12 $\mathbf{SStar}_{sp}(R) \subseteq \overline{\mathbf{SStar}}(R)$, e l'inclusione potrebbe essere propria. Tuttavia nel caso delle operazioni di tipo finito, per la Proposizione 4.23, abbiamo l'uguaglianza, i.e.,

$$\mathbf{SStar}_{f,sp}(R) = \overline{\mathbf{SStar}}(R) \cap \mathbf{SStar}_f(R) = \widetilde{\mathbf{SStar}}(R).$$

(b) Siano $\mathbf{Loc}(R)$ e $\mathbf{Overr}_{flat}(R)$, rispettivamente, l'insieme delle localizzazioni di R e l'insieme dei sopra-anelli R-piatti di R (quindi $\mathbf{Loc}(R) \subseteq \mathbf{Overr}_{flat}(R)$). Osserviamo che l'inclusione topologica $\iota : \mathbf{Overr}(R) \hookrightarrow \mathbf{SStar}_f(R)$, considerata nella Proposizione 5.1(a), si restringe all'inclusione topologica $\iota_{Loc} : \mathbf{Loc}(R) \hookrightarrow \widetilde{\mathbf{SStar}}(R)$ (o all'inclusione topologica $\iota_{flat} : \mathbf{Overr}_{flat}(R) \hookrightarrow \widetilde{\mathbf{SStar}}(R)$). D'altra parte, la mappa $\pi : \mathbf{SStar}_f(R) \to \mathbf{Overr}(R)$ della Proposizione 5.1(b) non sempre si può restringere ad una mappa $\widetilde{\mathbf{SStar}}(R) \to \mathbf{Overr}_{flat}(R)$, perché non tutte le intersezioni di localizzazioni di R sono R-piatte (ad esempio [11, Sezione 3, pagina 441]).

Proposizione 5.10. *Sia* $\Phi_f : \mathbf{SStar}(R) \to \mathbf{SStar}(R)$ *(rispettivamente,* $\overline{\Phi} : \mathbf{SStar}(R) \to \mathbf{SStar}(R)$*;* $\widetilde{\Phi} : \mathbf{SStar}(R) \to \mathbf{SStar}(R)$*) l'applicazione definita da* $\star \mapsto \star_f$ *(rispettivamente,* $\star \mapsto \overline{\star}$*;* $\star \mapsto \widetilde{\star}$*). Allora:*

(a) Le immagini di $\Phi_f, \overline{\Phi}$ *e* $\widetilde{\Phi}$ *sono, rispettivamente,* $\mathbf{SStar}_f(R), \overline{\mathbf{SStar}}(R)$ *e* $\widetilde{\mathbf{SStar}}(R)$*;*

(b) Le applicazioni $\Phi_f, \overline{\Phi}$ *e* $\widetilde{\Phi}$ *sono continue nella topologia di Zariski;*

(c) Le applicazioni $\Phi_f, \overline{\Phi}$ *e* $\widetilde{\Phi}$ *sono retrazioni topologiche di* $\mathbf{SStar}(R)$ *sulle rispettive immagini.*

Dimostrazione. Il punto (a) è banale. Il fatto che $\Phi_f|_{\mathbf{SStar}_f(R)}$ è l'identità segue dalla definizione. Inoltre, Φ_f è continua poiché, per ogni $F \in \mathbf{f}(R)$, abbiamo $\Phi_f^{-1}(U_F) = V_F$, e $\{U_F : F \in \mathbf{f}(R)\}$ è una sottobase di $\mathbf{SStar}_f(R)$. Quindi Φ_f è una retrazione topologica. Il resto si dimostra in maniera analoga (cf. [5, Proposizione 4.3]). $\square$

Un altro punto di somiglianza tra le operazioni di tipo finito, stabili e spettrali è dato dagli insiemi aperti necessari a generare la topologia di Zariski, indotta dalla topologia di Zariski di $\mathbf{Overr}(R)$. Infatti, se $\star$ è di tipo finito, sia $E \in \overline{\mathbf{F}}(R)$, e sia $\star \in V_E$, ossia $1 \in E^\star$, allora esiste un sottomodulo finitamente generato $F \subseteq E$ tale che $1 \in F^\star$, quindi $\star \in V_F$; ne segue che

$$V_E \cap \mathbf{SStar}_f(R) = \bigcup \{V_F \cap \mathbf{SStar}_f(R) : F \subseteq E, F \in \mathbf{f}(R)\}$$

e quindi $\{V_F \cap \mathbf{SStar}_f(R) : F \in \mathbf{f}(R)\}$ è una sottobase per la topologia di Zariski su $\mathbf{SStar}_f(R)$. Allo stesso modo, se $\star$ è stabile, allora $1 \in E^\star$ se e solo se $1 \in E^\star \cap D^\star = (E \cap D)^\star$. Di conseguenza, la topologia di Zariski su $\overline{\mathbf{SStar}}(R)$ è generata dagli elementi del tipo $V_I \cap \overline{\mathbf{SStar}}(R)$, con I un integrale intero di R. Lo stesso ragionamento mostra che $\{V_J \cap \widetilde{\mathbf{SStar}}(R) : J \subseteq \mathbf{f}(R)\}$ è una sottobase per la topologia di Zariski su $\widetilde{\mathbf{SStar}}(R)$. Questo implica che le operazioni semistar stabili sono completamente determinate dalla loro azione all'interno dell'anello. In particolare, se $\star : \mathbf{F}(R) \to \mathbf{F}(R)$ è un'operazione star stabile, allora esiste un'unica operazione semistar stabile $\hat{\star} : \overline{\mathbf{F}}(R) \to \overline{\mathbf{F}}(R)$ tale che $\hat{\star}|_{\mathbf{F}(R)} = \star$.

Osservazione 5.11. Notiamo che gli insiemi aperti della sottobase $\overline{U}_I := V_I \cap \overline{\mathbf{SStar}}(R) = \{\star \in \mathbf{SStar}(R) : 1 \in I^\star\} \cap \overline{\mathbf{SStar}}(R)$ (rispettivamente, $\widetilde{U}_I := V_I \cap \widetilde{\mathbf{SStar}}(R) = \{\star \in \mathbf{SStar}(R) : 1 \in I^\star\} \cap \widetilde{\mathbf{SStar}}(R)$) di $\overline{\mathbf{SStar}}(R)$ (rispettivamente, di $\widetilde{\mathbf{SStar}}(R)$), dove I è un ideale di R, formano una base di $\overline{\mathbf{SStar}}(R)$ (rispettivamente, $\widetilde{\mathbf{SStar}}(R)$), poiché $\overline{U}_{I'} \cap \overline{U}_{I''} = \overline{U}_{I' \cap I''}$ (rispettivamente, $\widetilde{U}_{I'} \cap \widetilde{U}_{I''} = \widetilde{U}_{I' \cap I''}$), presi comunque I' e I'' ideali di R.

D'altra parte, quando consideriamo gli ideali finitamente generati J di R, in generale gli $\widetilde{U}_J$ non formano una base per gli insiemi aperti in $\widetilde{\mathbf{SStar}}(R)$, poiché $\widetilde{U}_{J'} \cap \widetilde{U}_{J''} = \widetilde{U}_{J' \cap J''}$, e $J' \cap J''$ non è necesseriamente finitamente generato, anche se J' e J'' sono ideali finitamente generati di R.

Oltre alla topologia Zariski, possiamo munire tutto l'insieme $\mathbf{SStar}(R)$ di topologie, potenzialmente più deboli, indotte dagli insiemi considerati nel paragrafo precedente.

Dato uno spazio topologico X definiamo una relazione d'equivalenza dicendo che due punti sono equivalenti se non esiste nessun aperto che li separi (cioè che contenga uno e non l'altro). Il quoziente rispetto a questa relazione è uno spazio T_0 e si chiama *quoziente di Kolmogoroff*.

Proposizione 5.12. *Sia dotato* $\mathbf{SStar}(R)$ *della topologia generata da* $\{V_F : F \in \mathbf{f}(R)\}$ *(rispettivamente,* $\{V_I : I$ *è un ideale in* $R\}$*;* $\{V_J : J \subseteq R, J \in \mathbf{f}(R)\}$*). Allora, preservando le notazioni nella Proposizione 5.10,* Φ_f *(rispettivamente* $\overline{\Phi}$*;* $\widetilde{\Phi}$*) è il quoziente di Kolmogoroff di* $\mathbf{SStar}(R)$ *su* $\mathbf{SStar}_f(R)$ *(rispettivamente,* $\overline{\mathbf{SStar}}(R); \widetilde{\mathbf{SStar}}(R)$*), i.e., è l'applicazione canonica del quoziente rispetto alla relazione d'equivalenza di "indistinguibilità topologica" (due punti di uno spazio topologico sono topologicamente indistinguibili se hanno esattamente gli stessi intorni).*

Dimostrazione. (cf. [4, Proposizione 3.12]). □

Sia $Y \subseteq \mathrm{Spec}(R)$ un insieme non vuoto, allora definiamo s_Y l'*operazione semistar indotta da* Y, come l'operazione semistar associata all'insieme $\mathcal{T}(Y) := \{R_P : P \in Y\}$, i.e.,

$$E^{s_Y} := \bigcap \{ER_P : P \in Y\}, \forall E \in \overline{\mathbf{F}}(R).$$

Se $Y = \emptyset$ poniamo $E^{s_\emptyset} := K, \forall E \in \overline{\mathbf{F}}(R)$.

Dato uno spazio spettrale X è possibile considerare su X una topologia definita prendendo la collezione di tutti i sottospazi aperti e quesi-compatti di X come base di insiemi chiusi. Questa topologia è chiamata *topologia inversa su* X.

Nella seguente proposizione raccogliamo alcune proprietà che mettono in relazione Y e s_Y. Poniamo $Y^{gen} := \{z \in \mathrm{Spec}(R) : y \in \mathrm{Cl}(\{z\}), \exists y \in Y\}$, dove $\mathrm{Cl}(\{z\})$ è la chiusura di $(\{z\})$, e denotiamo con $\mathrm{Cl}^{inv}(Y)$ la chiusura di Y nella topologia inversa di $\mathrm{Spec}(R)$.

Proposizione 5.13. *Sia* R *un dominio d'integrità e siano* Y *e* Z *due sottoinsiemi non vuoti di* $\mathrm{Spec}(R)$*. Valgono le seguenti affermazioni:*

(a) $s_Y = s_Z \Leftrightarrow Y^{gen} = Z^{gen}$*;*

(b) s_Y *è di tipo finito* $\Leftrightarrow Y$ *è quasi-compatto;*

(c) $\widetilde{s_Y} = \widetilde{s_Z} \Leftrightarrow \mathrm{Cl}^{inv}(Y) = \mathrm{Cl}(Z)$*;*

(d) $\widetilde{s_Y} = s_{\mathrm{Cl}^{inv}(Y)}$.

Dimostrazione. Si utilizzano il Lemma 4.2, l'Osservazione 4.5, [6, Corollario 4.3] e [6, Corollario 5.2]. □

Notiamo che in generale $(s_Y)_f$ è quasi-spettrale, ma non spettrale, ed è spettrale se e solo se $(s_Y)_f$ è stabile (Proposizione 4.23(b)). In altre parole è possibile che $\widetilde{s_Y} \lneq (s_Y)_f$ e quindi in generale non vale $(s_Y)_f = s_{\mathrm{Cl}^{inv}(Y)}$.

Diciamo che un ideale non nullo I di R è un ideale *quasi-*$\star$ se $I = I^\star \cap R$. Denotiamo con $\mathrm{QSpec}^\star(R)$ l'insieme degli ideali *quasi-*$\star$*-primi* di R, ossia gli ideali quasi-$\star$ che sono anche ideali primi.

Lemma 5.14. *Sia* $\mathcal{D}$ *un insieme non vuoto di operazioni semistar spettrali. Per ogni operazione semistar spettrale* $\star$*, poniamo* $\Delta(\star) := \mathrm{QSpec}^\star(R)$*.*

(a) $\wedge_{\mathcal{D}}$ *è spettrale con* $\Delta(\wedge_{\mathcal{D}}) = \bigcup\{\Delta(\star) : \star \in \mathcal{D}\}$*;*

(b) Se $\vee_{\mathcal{D}}$ *è quasi-spettrale, allora è spettrale con* $\Delta(\vee_{\mathcal{D}}) = \bigcap\{\Delta(\star) : \star \in \mathcal{D}\}$.

Dimostrazione. (a) Sia $\Delta := \bigcup\{\Delta(\star) : \star \in \mathcal{D}\}$. Per ogni $E \in \overline{\mathbf{F}}(R)$

$$E^{\wedge_{\mathcal{D}}} = \bigcap\{ER_P : P \in \Delta(\star), \star \in \mathcal{D}\} = \bigcap\{ER_P : P \in \Delta\}.$$

In particolare, $\wedge_{\mathcal{D}}$ è spettrale e $\Delta \subseteq \mathrm{QSpec}^{\wedge_{\mathcal{D}}}(R)$. D'altra parte, se $Q \in \mathrm{QSpec}^{\wedge_{\mathcal{D}}}(R)$, allora $Q^\star \neq R^\star$ per qualche $\star \in \mathcal{D}$, e questo implica che $Q \in \mathrm{QSpec}^\star(R)$. Quindi $\Delta = \mathrm{QSpec}^{\wedge_{\mathcal{D}}}(R)$.

(b) Sia $P \in \mathrm{QSpec}^{\vee_{\mathcal{D}}}(R)$. Allora, P appartiene a $\mathrm{QSpec}^\star(R)$ per ogni $\star \in \mathcal{D}$, i.e., $\mathrm{QSpec}^{\vee_{\mathcal{D}}}(R) \subseteq \bigcap\{\Delta(\star) : \star \in \mathcal{D}\}$. Poiché ogni $\star \in \mathcal{D}$ è spettrale, allora, per ogni $E \in \overline{\mathbf{F}}(R), E^\star \subseteq ER_P$ per ogni $P \in \Delta(\star)$ e, in particolare, per ogni $P \in \bigcap\{\Delta(\star) : \star \in \mathcal{D}\}$. Quindi,

$$E^{\vee_{\mathcal{D}}} \subseteq \bigcap\{ER_P : P \in \bigcap\{\Delta(\star) : \star \in \mathcal{D}\}\} \subseteq \bigcap\{ER_P : P \in \mathrm{QSpec}^{\vee_{\mathcal{D}}}(R)\}.$$

Tuttavia, se $\vee_{\mathcal{D}}$ è quasi-spettrale, allora vale l'inclusione opposta. Quindi è vera l'uguaglianza, e quindi $\vee_{\mathcal{D}}$ è spettrale con $\Delta(\vee_{\mathcal{D}}) = \bigcap\{\Delta(\star) : \star \in \mathcal{D}\}$.

□

Notiamo che l'ipotesi di quasi-spettralità di $\vee_{\mathcal{D}}$ nel punto (b) è necessaria: ad esempio, se $\mathcal{A}$ è l'anello degli interi algebrici, $\star_P := s_{\mathrm{Max}(\mathcal{A})\setminus\{P\}}$ e $\mathcal{D} := \{\star_P : P \in \mathrm{Max}(\mathcal{A})\} \subseteq \mathbf{SStar}_{sp}(\mathcal{A})$, allora $\vee_{\mathcal{D}}$ è un'operazione semistar che chiude $\mathcal{A}$ e quindi chiude ogni ideale principale di $\mathcal{A}$, mentre $\mathrm{QSpec}^{\vee_{\mathcal{D}}}(R) = \{(0)\}$, quindi $\vee_{\mathcal{D}}$ non è quasi-spettrale.

Il Lemma 5.14(b) fornisce informazioni utili sull'estremo superiore di una famiglia di operazioni semistar spettrali di tipo finito, permettendo di dimostrare che lo spazio di tutte le operazioni semistar stabili di tipo finito è spettrale. La dimostrazione del seguente teorema ricalca quella del Teorema 5.8.

Teorema 5.15. *Sia R un dominio d'integrità. Allora $\widetilde{\mathbf{SStar}}(R)$ è uno spazio spettrale.*

Dimostrazione. La dimostrazione ricalca quella del Teorema 5.8. □

Infine possiamo introdurre, in maniera naturale, una topologia sugli insiemi $\mathbf{LS}(R)$ e $\mathbf{LS}_f(R)$, che chiameremo ancora *topologia di Zariski*. Gli insiemi aperti di una sottobase sono i

$$W_I := \{\mathcal{F} \in \mathbf{LS}(R) : I \in \mathcal{F}\},$$

con I che varia tra gli ideali di R.

Teorema 5.16. *Sia R un dominio d'integrità. L'applicazione $\lambda : \mathbf{LS}(R) \to \overline{\mathbf{SStar}}(R)$ (rispettivamente, l'applicazione $\lambda_f : \mathbf{LS}_f(R) \to \widetilde{\mathbf{SStar}}(R)$), definita da $\mathcal{F} \mapsto \star_{\mathcal{F}}$, stabilisce un omeomorfismo tra spazi dotati delle topologie di Zariski (rispettivamente, delle topologie indotte dalle topologie di Zariski). In particolare $\mathbf{LS}_f(R)$ è uno spazio spettrale.*

Dimostrazione. Per dimostrare che λ è un omeomorfismo, basta far vedere che è continua e aperta. Sia $U_I := V_I \cap \overline{\mathbf{SStar}}(R)$, con I un ideale proprio di R, un insieme aperto della sottobase di $\overline{\mathbf{SStar}}(R)$. Allora,

$$\lambda^{-1}(U_I) = \{\mathcal{F} \in \mathbf{LS}(R) : \star_{\mathcal{F}} \in U_I\} =$$

$$= \{\mathcal{F} \in \mathbf{LS}(R) : 1 \in (I : H), \exists H \in \mathcal{F}\} =$$
$$= \{\mathcal{F} \in \mathbf{LS}(R) : H \subseteq I, \exists H \in \mathcal{F}\} =$$
$$= \bigcup_{H \subseteq I} W_H,$$

e quindi λ è aperta. Inoltre $\bigcup_{H \subseteq I} W_H = W_I$: infatti, se $\mathcal{F} \in W_H$ allora $H \in \mathcal{F}$ e quindi $I \in \mathcal{F}$; l'altra inclusione è banale. Di conseguenza, $\lambda^{-1}(U_I) = W_I$, e, poiché λ è biunivoca, $\lambda(W_I) = U_I$. Quindi λ è sia continua che aperta, e quindi è un omeomorfismo.
Notiamo che l'immagine di λ_f è proprio $\widetilde{\mathbf{SStar}}(R)$ (Teorema 2.10, Corollario 2.11 e Proposizione 3.2); quindi anche λ_f è un omeomorfismo tra spazi.
Dal Teorema 5.15 possiamo dedurre che lo spazio $\mathbf{LS}_f$ dotato della topologia di Zariski indotta da $\mathbf{LS}$ è uno spazio spettrale. $\square$

Bibliografia

[1] D. D. Anderson e D. F. Anderson, *Some remarks on star operations and the class group*, J. Pure Appl. Algebra 51 (1988), 27-33.

[2] M. F. Atiyah e I. G. Macdonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc. (1969).

[3] C. A. Finocchiaro, *Spectral spaces and ultrafilters*, Comm. Algebra 42 (4), (2014)

[4] C. A. Finocchiaro, M. Fontana e D. Spirito, *New distinguished classes of spectral spaces: A survey*, "Multiplicative Ideal Theory and Factorization Theory - Commutative and Non-Commutative Perspectives", S. Chapman, M. Fontana, A. Geroldinger, and B. Olberding, Editors, Springer Verlag Publisher, (2015) (to appear).

[5] C. A. Finocchiaro, M. Fontana e D. Spirito, *Spectral spaces of semistar operations*, (2015)(submitted).

[6] C. A. Finocchiaro e D. Spirito, *Some topological considerations on semistar operations*, Journal of Algebra, 409 (2014).

[7] M. Fontana e J. A. Huckaba, *Localizing system and semistar operations*, Non-Noetherian Commutative Ring Theory, S. Chapman e S. Glaz, eds., Chapter 8, Kluwer Academic Publishers (2000).

[8] M. Fontana, J. Huckaba e I. Papick, *Prüfer Domains*, M. Dekker, New York (1997).

[9] R. Gilmer, *Multiplicative Ideal Theory* (Part I and II), Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics, Queen's University, Kingston, Ontario, Canada, (1968).

[10] R. Gilmer, *Multiplicative Ideal Theory*, M. Dekker, New York (1972).

[11] W. Heinzer e M. Roitman, *Well-centered overrings of an integral domain*, J. Algebra, no.2, (2004)

[12] W. Krull, *Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche*, I - II. Math. Z. 41 (1936).

[13] A. Okabe, *Note on a Fontana-Huckaba's open problem*, JP journal of algebra, number theory and applications, Pushpa Publishing House (2005).

[14] A. Okabe e R. Matsuda, *Semistar-operations on integral domains*, Math. J. Toyama Univ. 17 (1994), 1-21.

[15] B. Stenström, *Rings of Quotients*, Springer, Berlin (1975).

Ringraziamenti

Alla fine di questo percorso ho solo voglia di ringraziare tutte le persone che mi sono state vicine.

Grazie ai miei genitori che mi hanno sempre sostenuta e incoraggiata, che sono stati felici con me quando le cose andavano nella direzione giusta e mi hanno spronata ad andare avanti quando le cose andavano meno bene.

Grazie ai miei colleghi matematici, che hanno condiviso con me le gioie e i dolori di questa scienza.

Grazie a Elisa e Daria, che in un modo o nell'altro ci sono sempre e mi vogliono bene.

Grazie a Giulia, Filippo e Renato, che sono tre colonne salde della mia vita, che mi hanno fatto crescere tanto e continuano ad essere per me delle bussole.

Il grazie più grande va a Emanuele, la mia luce e la mia forza, che mi ha sopportato anche quando ero un mostro in preda all'ansia, che ha reso più belli tutti i miei traguardi e che fra pochi mesi darà completezza alla mia felicità.