

AL430 Anelli commutativi ed ideali

A.A. 2017/2018

Prof. Marco Fontana

1. Valutazioni ed anelli di valutazione

Gruppi ordinati. Esempi. Valutazioni e gruppi di valori. Proprietà ed esempi. Valori assoluti. Ogni gruppo ordinato è il gruppo di una valutazione definita su un opportuno campo di una qualunque caratteristica. Valutazioni equivalenti. Proprietà principali di una valutazione.

Esempio esplicito della costruzione relativa al fatto che ogni gruppo ordinato è il gruppo di una valutazione definita su un opportuno campo. Restrizione di una valutazione e valutazione banale. Valori assoluti e valori assoluti non archimedei. Esempi di valori assoluti non archimedei. Metriche ed ultrametriche associate a valori assoluti e a valori assoluti non archimedei. Equivalenza di valutazioni tra la valutazione p -adica definita su \mathbf{Q} ed il valore assoluto non archimedeo $|\dots|_{c,p}$ definito su \mathbf{Q} , dove c è un numero reale positivo < 1 .

Anello associato ad una valutazione. Prime proprietà. Anello di valutazione. Ogni anello di valutazione è associato canonicamente ad una classe di equivalenza di valutazioni. Gruppo (totalmente ordinato) di valori di una valutazione e gruppo (parzialmente ordinato) di divisibilità di un dominio. Gruppi parzialmente ordinati reticolati e gruppi parzialmente ordinati filtrati.

Esempi di anelli di valutazione associati a vari tipi di valutazioni considerate. Costruzione generale di una valutazione che ha come gruppo di valori associato un gruppo totalmente ordinato assegnato: caso dei gruppi totalmente ordinati \mathbf{Z} e $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$. Le valutazioni ord_0 ed ord_∞ sul campo delle funzioni razionali $k(X)$, dove k è un campo.

Composizione di anelli di valutazione (ovvero, *pullbacks* di anelli di valutazione): proprietà (cenni) ed esempi. Corrispondenza biunivoca (che scambia gli ordinamenti) tra sopranelli di valutazione di un dato anello di valutazione V e $\text{Spec}(V)$. Sottogruppi isolati di un gruppo ordinato. Corrispondenza biunivoca (che conserva gli ordinamenti) tra sopranelli di valutazione di un dato anello di valutazione V e sottogruppi isolati del suo gruppo di valori. Richiami sul Teorema di Krull sull'esistenza di anelli di valutazione e sulla presentazione della chiusura integrale come intersezione di sopraanelli di valutazione. Estensioni di valutazioni in una estensione finita di campi $K \subset E$, indici di ramificazione e gradi residuali. Relazione $e(w,v)f(w,v) \leq [E : K]$. Cenni sulla relazione $\sum_i e_i f_i \leq [E : K]$. Posti: definizione, esempi e prime proprietà.

Composizione (prodotto operatoria) di posti. Esempi. Relazione con i prodotti fibrati di anelli di valutazione. Valutazioni discrete ed anelli di valutazione discreta.

Esempi. Prime proprietà delle valutazioni discrete. Caratterizzazioni degli anelli di valutazione discreta.

Principali proprietà degli anelli di valutazione discreta (DVR). Anelli di valutazione discreta con campo residuo isomorfo ad un campo contenuto nell'anello. Principali proprietà ed esempi. Relazione con campi di serie formali di Laurent. Valutazione discreta e valutazione di ordine in tali campi. Completamenti di valutazioni (cenni).

Topologia determinata da una valutazione. Completamenti. Relazioni con campi ed anelli di serie formali (cenni). Cenni su Domini di Prüfer e Domini di Dedekind. Domini di Bézout. Anello delle funzioni razionali di Kronecker. Spazi topologici formati da anelli di valutazione di un campo fissato dotati della topologia di Zariski. Spazi spettrali.

2. Complementi

Questioni relative alla compattezza dello spettro primo di un anello.

Chiusura, Proprietà di separazione ed Irriducibilità nello spettro primo di un anello.

Connessione nello spettro primo di un anello ed anelli booleani.

Spazi topologici noetheriani e spettro primo di un anello noetheriano; anelli di funzioni continue.

Ideali primari di anelli di valutazione e anelli di valutazione discreti e fortemente discreti.

Rango di una valutazione; Gruppi Discreti e Valutazioni Discrete; Valutazioni Essenziali.

Intersezioni di anelli di valutazione; Domini di Krull.

TESTI CONSIGLIATI

- [1] R. GILMER, *Multiplicative Ideal Theory*. M. Dekker, New York, (1992).
 [2] I. KAPLANSKY, *Commutative Rings*. Allyn and Bacon, (1970).
 [3] M. FONTANA, Teoria delle valutazioni (appunti per il corso AL5, raccolti da A. Fabbri).

BIBLIOGRAFIA SUPPLEMENTARE

Un'ampia lista di ulteriori volumi consigliati è riportata nella pagina web del corso:

<https://al430-aa2017-2018.blogspot.it/>

MODALITÀ D'ESAME

- valutazione in itinere (“esoneri”)		<input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO
- esame finale	scritto	<input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO
	orale	<input type="checkbox"/> SI	<input checked="" type="checkbox"/> NO
- altre prove di valutazione del profitto (meglio descritte sotto)		<input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO

Gli studenti che hanno sostenuto con esito positivo, nel corso del semestre, le prove di valutazione parziale (prove scritte di “esonero” o esposizioni seminariali) accedono direttamente al colloquio di verbalizzazione del voto proposto dal docente, da effettuarsi durante la I Sessione di esame (Appello A o B).

Per tutti gli studenti che non si avvalgono della possibilità della valutazione del profitto durante il corso, l’esame finale consiste in una prova scritta (comprendente anche domande di tipo teorico). Gli studenti che non hanno frequentato il corso debbono prenotarsi almeno 10 giorni prima dell’appello d’esame, contattando il docente nell’orario di ricevimento.