Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AL110- 1 Ottobre 2010

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. Marco Fontana
Tutori: Cesare Catavitello e Alessandra Albanese

TUTORATO 1
1 OTTOBRE 2010

1. Siano A, B, C, T insiemi non vuoti. Sia $\triangle$ la differenza simmetrica, definita da $A \triangle B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
   Mostrare che:
   a) $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$
   b) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$
   c) $(A \triangle B) \setminus C = (A \setminus C) \triangle (B \setminus C)$
   d) $A \triangle B = (A \cup B) \cap (B \setminus A) \cup (A \setminus B)$
   e) $(A \triangle B) \triangle C = (A \setminus (B \cup C)) \cup (B \setminus (A \cup C)) \cup (C \setminus (A \cup B)) \cup (C \cap B \cap A)$
   f) $(B \setminus A) = (B \triangle A) \setminus A$

2. Siano A, B, C insiemi non vuoti;
   Rispondere alle seguenti domande:
   a) $A \setminus C = \varnothing \Rightarrow A = C$?
   b) Se $A \setminus (C \cup B) = \varnothing$ e $B \cap A \neq \varnothing$ e $C \cap A = \varnothing$. È vero che $B \cap C = \varnothing$? e $C \subseteq (B \cap A)$?

3. Determinare $A \cup B$, $A \cap B$ e $A \setminus B$ Dove:
   a) $A := \{x \in \mathbb{N} | 4 < x < 27\}$
   b) $B := \{x \in \mathbb{N} | x = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$

4. Determinare $A \cup B$ e $A \cap B$ nei seguenti casi:
   a) $A := \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 4x - 5 < 0\}$, $B := \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 12x + 20 < 0\}$
   b) $A := \{x \in \mathbb{R} | x^2 + 1 + 2x > 0\}$, $B := \{x \in \mathbb{R} | x^2 + 5x - 4 < 0\}$

5. Supponiamo che gli studenti iscritti al primo anno di corso di laurea in matematica siano 800. Supponiamo che fra loro 570 passino l'esame di algebra, e 400 l'esame di informatica. Supponiamo inoltre che ogni studente passi almeno un esame, quanti sono gli studenti che riescono a passare entrambi gli esami?

6. Negare le seguenti proposizioni:
   a) $(A \vee B) \Rightarrow C$
   b) $((A \wedge B) \vee (C \wedge D)) \Rightarrow H$
   c) $(A \vee B) \Rightarrow (C \wedge D)$

d) $(\neg A \wedge (\neg B)) \Rightarrow (C \wedge D)$

e) $(A \vee (B \wedge (\neg (C \vee D)))) \Rightarrow ((\neg H) \wedge (\neg T))$

f) $(A \wedge C) \Rightarrow ((\neg T) \wedge V)$

g) $(A \wedge (\neg ((\neg B) \vee (\neg C)))) \Rightarrow (T \vee ((\neg P) \wedge (\neg R)))$

7. Rispondere alle seguenti domande:
   Se $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow C$ e $C \Rightarrow A$;

   a) $C \Rightarrow B$?

   b) $\neg B$ cosa implica?

   Se $C \Rightarrow D$, $T \Rightarrow H$, $D \Rightarrow T$, $H \Rightarrow D$;
   è vero che:

   a) $T \not\Rightarrow C$?

   b) $T \Rightarrow C$?

   c) $C \not\Rightarrow H$?

   d) $T \Rightarrow H$ ma $T \not\Rightarrow D$?

   e) $H \not\Rightarrow C$?

   f) cosa posso dire su D, T, H?

8. Siano A e B proposizioni logiche. Si determinino le tavole di verità di $(\neg A) \wedge B$, $(\neg A) \vee (\neg B)$, $(\neg B) \vee (\neg\neg A)$.

9. Siano A , B e C proposizioni logiche. Si determinino le tavole di verità di $A \vee (B \wedge (\neg C))$, $A \vee ((\neg B) \vee (\neg C))$, $(\neg B) \vee (\neg (A \vee C))$

10. Dimostrare per induzione che:

    a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

    b) $\sum_{i=1}^{n} (2i - 1) = n^2$

    c) $2^n \geqslant n^2$, $n > 3$

    d) $(1 + x)^n \geqslant 1 + nx$ se $x \geqslant -1$ (Disuguaglianza di Bernoulli)