Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AL110- 23 Dicembre 2010

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. Marco Fontana

Tutori: Cesare Catavitello e Alessandra Albanese

TUTORATO 11
23 DICEMBRE 2010

1. a) Determinare il resto delle divisioni per 5, per 7 e per 11 di 2^{677}.
   b) Determinare il resto della divisione per 385 di 2^{677}.

2. Si costruisca una congruenza lineare del tipo
$$ax \equiv b (\text{mod } 209)$$
(se una tale congruenza esiste) che abbia esattamente 11 soluzioni non congrurenti tra loro modulo 209. Scritta tale congruenza, se ne determinino tutte le soluzioni.

3. Si determinino le ultime due cifre del numero $(12423)^{122}$

4. Stiamo mettendo le palline su un enorme albero di natale dai rami molto resistenti. Sappiamo che le palline sono un numero inferiore a 2500. Mettendo esattamente 11 palline per ramo, ne avanzano 4; sistemandone invece 13 per ramo,ne restano 5;scegliamo allora di riempire ogni ramo con 17 palline, ma ne resta fuori una sola. Quante palline abbiamo a disposizione??.

5. Si consideri l'applicazione
$$f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$
$$(x, y) \mapsto 10x + 15y$$
   a) Dire se f è iniettiva e/o suriettiva.
   b) Determinare $\mathrm{Im}(f)$.
   c) Determinare $f^{-1}(25)$ e $f^{-1}(25) \cap \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

6. Si dimostri che $37n^{32} + 7n^{72}$ è un multiplo di 22 per ogni scelta di $n \in \mathbb{N}$.

7. Trovare, se esiste un intero $h < 783$ tale che $456h$ sia un multiplo di 783.

8. Consideriamo la funzione $F : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definita da
$$f(n, m) = (mcm(n, m), MCD(n, m))$$
Si dica se è iniettiva e nel caso si costruisca g con $gf = id$. Se f è suriettiva e, nel caso, si costruisca g con $fg = id$.

9. Provare che:
   G é un gruppo moltiplicativo $\Leftrightarrow \phi : G \to G$ t.c. $a \mapsto a^2$ é un omomorfismo moltiplicativo.

10. Dimostrare che ogni gruppo ciclico é abeliano.

11. Dimostrare che $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ sia un anello commutativo unitario.

12. Sia $G =< g >$ un gruppo moltiplicativo; provare che:
    $f : G \to \mathbb{Z}$ t.c. $g^m \mapsto m$ sia un omomorfismo.

13. Dato G un gruppo moltiplicativo, dimostrare che $f_g : G \to G$ t.c. $x \mapsto g^{-1}xg$ sia un omomorfismo.
    É iniettivo?

14. Studiare le seguenti applicazioni, stabilendo se si tratta di mappe iniettive, suriettive, omomorfismi; e calcolare ove possibile nucleo e immagine:
    a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3 + x$;
    b) $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n^2 - n + 1$;
    c) $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto |n|$;
    d) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $z \mapsto z^3$.

15. Dimostrare che $f : \mathbb{Z} \to (\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7)$; t.c. $x \mapsto ([x]_5, [x]_7)$ sia suriettiva. É iniettiva? determiare almeno un'inversa destra.

16. Dimostrare, usando il punto precedente, che $\mathbb{Z}_{35}$ sia isomorfo a $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7$.