Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AL110- 22 Ottobre 2010

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. Marco Fontana

Tutori: Cesare Catavitello e Alessandra Albanese

TUTORATO 3
22 OTTOBRE 2010

1. Si stabilisca quali sono le proprietà delle seguenti relazioni :
   a) $R := \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x = 3y\}$.
   b) $R := \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x = -y\}$.
   c) $R := \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x = y - 8\}$.
   d) $R := \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : MCD(x, y) = 1\}$.
   e) $R := \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x = y^2\}$.
   f) $R := \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : xy = 0\}$.
   g) $R := \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x + y \in \mathbb{Z}\}$.
   h) $R := \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : xy \in \mathbb{Z}\}$.
   i) $R := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : xy \in \mathbb{Z}\}$.
   j) $R := \{(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} : xy \in \mathbb{Z}\}$.
   k) $R := \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x + y = 10\}$.
   l) $R := \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x^2 = y^2\}$.
   m) $R := \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x - y$ è multiplo di $3\}$.
   n) $R := \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x$ divide $y\}$.
   o) Sia Π un piano e $\Re$ la collezione di tutte le rette contenute in Π:
   $R := \{(r, s) \in \Re \times \Re : r \parallel s\}$.
   p) $R := \{(r, s) \in \Re \times \Re : r \perp s\}$.
   q) Sia Σ un cerchio contenuto in Π e sia
   $R := \{(r, s) \in \Re \times \Re : r$ interseca s in almeno un punto di $\Sigma\}$.

2. Fra le relazioni dell'esercizio precedente, si determinino quelle che sono relazioni di equivalenza.

3. Si determinino gli elementi in relazione R con l'elemento 2, dove R è la relazione data dal punto m dell'esercizio 1 (i.e. gli elementi $x \in \mathbb{Z}$ tali che $(2, x) \in R$).

4. Siano n un intero positivo e X un insieme tale che $|X| = n$. Sia R la seguente relazione:
   $R := \{(A, B) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) : |A| = |B|\}$
   a) Quali sono le proprietà di cui gode la relazione R?

b) Quanti sono i sottoinsiemi di k elementi di un insieme di n elementi? Si motivi la risposta.

5. Sia $A := \{1, 2, 3, 4\}$ un insieme con quattro elementi. Si definisca:
   a) Una relazione su A riflessiva e antisimmetrica, ma non transitiva;
   b) Una relazione su A riflessiva, antisimmetrica e transitiva;
   c) Una relazione su A transitiva.
   d) Si determini, se esiste, la più piccola relazione di equivalenza ε su A tale che $\{(1, 2), (2, 3)\} \subseteq \varepsilon$

6. Sia X un insieme non vuoto. Si determinino le proprietà delle seguenti relazioni:
   a) $R := \{(A, B) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) : A \setminus B \neq \emptyset\}$.
   b) $R := \{(A, B) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) : A \cup B = A\}$.

7. Sia X un insieme non vuoto di proposizioni logiche. Di quali proprietà gode la relazione
   $R := \{(A, B) \in X \times X : A \Rightarrow B\}$?

8. Sia F l'insieme di tutti gli esseri umani. Sia R la relazione:

$$R := \{(e, f) \in F \times F : e \text{ è figlio di } f\}$$

   Di quali proprietà gode R?

9. Sia X un insieme $\neq \emptyset$, e sia $\mathcal{F}$ una famiglia di relazioni di equivalenza definite su X. Si ponga $\mathcal{R} := \bigcup \mathcal{F}$, $\mathcal{S} := \bigcap \mathcal{F}$.
   a) Si stabilisca se $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza su X.
   b) Si stabilisca se $\mathcal{S}$ è una relazione di equivalenza su X.

10. Si considerino i numeri complessi $z := -\sqrt{3} + i$, $z' := 2010 - 2010i$.
    a) Si esibisca la forma polare di $z, z', z^{-1}, z'^{-1}, zz'$.
    b) Si stabilisca se la relazione

$$R := \{(u, v) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : |u| = |v|\}$$

    su $\mathbb{C}$ è di equivalenza.
    c) Si determini $[zz']_R := \{u \in \mathbb{C} : (u, zz') \in R\}$. Si disegni $[zz']_R$ sul piano complesso.