Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AL110- 29 Ottobre 2010

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. Marco Fontana

Tutori: Cesare Catavitello e Alessandra Albanese

Tutorato 4

29 Ottobre 2010

1. In ciascuno dei seguenti casi, stabilire quali sono le proprietà delle seguenti relazioni R e se esse sono relazioni di equivalenza:
   a) $R = \{(x, y) \in D \times D, xy$ è un numero dispari$\}$, dove D è l'insieme dei numeri dispari.
      i. Quante classi di equivalenza induce questa relazione?
   b) $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x + y$ è un numero pari$\}$.
      i. Quante classi di equivalenza induce questa relazione?
      ii. Esibire per ognuna di tali classi almeno un rappresentante.
   c) $R = \{(x, y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : x + \overline{y} \in \mathbb{R}\}$.
   d) $R = \{(x, y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : \arg x = \arg y = \frac{\pi}{4}\}$.
   e) $R = \{(x, y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : |x| = |y|\}$.
   f) $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x = y\}$.
   g) $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : ax + by = 2, \text{ per opportuni } a, b \in \mathbb{Z}\}$.
   h) $R = \{(x, y) \in (\mathbb{Z} - \{0\}) \times (\mathbb{Z} - \{0\}) : ax + by = 1, \text{ per opportuni } a, b \in \mathbb{Z}\}$.
   i) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x - y = 2k\pi, \text{ per qualche } k \in \mathbb{Z}\}$.
   j) $R = \{((a, b), (c, d)) \in (\mathbb{Z} - \{0\})^2 \times (\mathbb{Z} - \{0\})^2 : MCD(a, b) = MCD(c, d)\}$.

2. Siano $a, b \in \mathbb{N}^+$. Dimostrare che, se $MCD(a, b) = 1$, allora $MCD(ab, a + b) = 1$.

3. Esibire una relazione di equivalenza su $\mathbb{Z}$ tale che la sua partizione in classi di equivalenza abbia 7 classi distinte.

4. Dimostrare le seguenti asserzioni.
   a) $7^{n+1} - 1$ è divisibile per 6 per ogni $n \in \mathbb{N}$.
   b) $2^{n+1} + 4^{n+1} \leq 5^{n+1}$ per ogni $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$.
   c) $n^2 + n$ è un numero pari.
   d) $10^{n+1} + 3 \cdot 10^n + 5$ è divisibile per 9.
   e) $2^{2^n} + 3^{2^n} + 5^{2^n}$ e $6^{2^n} + 10^{2^n} + 15^{2^n}$ sono divisibili per 19.
   f) Ogni numero intero positivo è somma finita di numeri di Fibonacci a due a due non consecutivi.

5. Sia p un numero primo maggiore di 3 tale che $p + 2$ sia un numero primo (i.e. $p, p + 2$ sono *primi gemelli*). Dimostrare che $2p + 2$ è divisibile per 12.