Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AL110- 12 Novembre 2010

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. Marco Fontana

Tutori: Cesare Catavitello e Alessandra Albanese

Tutorato 5
12 Novembre 2010

1. Determinare tutti i rappresentanti, ottenuti quozientando $\mathbb{Z}$ con la seguente relazione di equivalenza R:
   $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, x - y$ è multiplo di $n\}$; $n = \{3, 5, 6, 11, 12, 15, 21\}$

2. Stabilire se le seguenti congruenze lineari sono risolubili e, in caso affermativo, trovare tutte le soluzioni:
   a) $207x \equiv 12 \pmod 6$.
   b) $36x \equiv 10 \pmod{12}$.
   c) $3x \equiv 5 \pmod 7$.
   d) $2x \equiv 8 \pmod 7$.
   e) $4x \equiv 8 \pmod{10}$.
   f) $17x \equiv 1 \pmod{23}$.
   g) $11x \equiv 5 \pmod 3$.
   h) $515x \equiv 21 \pmod{21}$.
   i) $123x \equiv 32 \pmod 8$.
   j) $16x \equiv 40 \pmod{12}$.

3. Dimostrare che:
   a) a^2 è congruo ad 1 oppure a $0 \pmod 4 \forall a \in \mathbb{Z}$.
   b) $n^2 \equiv n \pmod 2 \forall n \in \mathbb{N}$.
   c) $7n \equiv n \pmod 4$ se e solo se n è pari, $n \in \mathbb{N}$.
   d) se p è un primo $p > 3$ allora $p \equiv 1 \pmod 6$ oppure $p \equiv 5 \pmod 6$.

4. Sia $a = 27819234857893022983643671339$;
   Determinare la classe di equivalenza di $a \mod 4$ e di $a^2 \mod 4$

5. Determinare tutti gli elementi $k \in \mathbb{Z}_n$ tali che $\exists\, d$ per cui
   $kd \equiv 1 \pmod n$, $n = \{5, 6, 9, 11, 13\}$

6. Determinare per quali $\lambda \in \mathbb{Z}$ le seguenti congruenze ammettono soluzione:
   a) $7x \equiv \lambda \pmod{24}$.
   b) $5x \equiv \lambda \pmod{11}$.
   c) $\lambda x \equiv 1 \pmod{11}$.

7. Dimostrare, utilizzando le congruenze, che :

a) $10^n - 1$ è divisibile per 9.
b) $3^{2^n} - 1$ è divisibile per 8.
c) $7^n - 1$ è divisibile per 6.

8. Eseguire le seguenti operazioni, e fare la prova del 9:
   a) $23 \cdot 17$
   b) $22 \cdot 63$
   c) $45 \cdot 11$