Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AL110- 3 Dicembre 2010

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. Marco Fontana
Tutori: Cesare Catavitello e Alessandra Albanese

Tutorato 8
3 Dicembre 2010

1. Effettuare la divisione con il resto fra le seguenti coppie di polinomi:
   a) $p(x) = x^2 - 7x - 2$, $q(x) = x - 3$.
   b) $p(x) = 2x^5 + 3x^4 + 12x + 1$, $q(x) = x^3 + 5x + 2$.
   c) $p(x) = x^4 + 74x^3 + 3x + 1$, $q(x) = x^4 + 74x^3 + x$.
   d) $p(x) = x^{10} + 19x^8 + 49x^6 + 5x^5 + 19x^4 + 15x^3 + 9x^2 + 5x + 3$, $q(x) = x^4 + 3x^2 + 1$.
   e) $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1$, $q(x) = x + 1$.

2. Calcolare l'MCD e un'identitá di bezóut fra le coppie di polinomi dell'esercizio precedente e dei seguenti:
   a) $p(x) = x^2 + 2x + 1$, $q(x) = x^4 + 1$.
   b) $p(x) = x^4 + 2x^2 + 1$, $q(x) = x^3 + 3x^2 + x + 3$.
   c) $p(x) = x^4 - 1$, $q(x) = x^5 - x^4 + 2x^2 - x - 1$.
   d) $p(x) = x^6 + x^3 + 1$, $q(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 + 3$.

3. Sia x una indeterminata, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
   a) l'MCD fra $3x + 3$ e 3 in $\mathbb{Q}$ é 1.
   b) l'MCD fra $3x + 3$ e 3 in $\mathbb{Z}$ é 1.

4. Dare la definizione di coefficiente direttore e di grado di un polinomio a coefficienti in $\mathbb{Z}$.

5. Dare tre esempi di funzioni iniettive e tre di funzioni suriettive esplicitandone immagine e insieme quozinete data dalla relazione di equivalenza ove elementi del dominio vengono mappati nello stesso elemento dell'immagine.

6. Trovare le radici dei seguenti polinomi in $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_7, \mathbb{Z}_{11}$:

   - $x^4 + 2x + x^3 + 2$.
   - $5x^2 + x + 2$.
   - $x^7 - 1$.
   - $x^8 + 3x$.
   - $4x^2 + 2$.
   - $x^5 + 5x^2 + 4x + 1$.

7. Sia $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Determinare tutte le possibili biiezioni di A in se stesso, calcolandone il numero.

8. Sia $f : A \to A$, dove $f(n) = n + 1, 0 < n < 3, f(4) = 1$, determinare l'inversa di f.

9. Sia $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $f, g : B \to B$ t.c.:
   f manda $1 \mapsto 2, 2 \mapsto 3, 3 \mapsto 4, 4 \mapsto 5, 5 \mapsto 1$
   g manda $1 \mapsto 1, 2 \mapsto 2, 3 \mapsto 4, 4 \mapsto 5, 5 \mapsto 3$
   determinare l'inversa di f e g sapendo che $\exists k \in \mathbb{N}$ t.c. $f^k = id_B$

10. Sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ l'applicazione definita da $f(x) = x^2$ per ogni x in $\mathbb{Z}$. Determinare:
    a) $f^{-1}(9)$
    b) $f^{-1}(-4)$
    c) $f^{-1}(\mathbb{N})$
    d) $f(f(2))$

11. Determinare se le seguenti applicazioni sono iniettive e/o suriettive, calcolandone immagine e l'insieme quoziente sul dominio della relazione di equivalenza degli elementi mappati in uno stesso punto:
    a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b \; \forall a \in \mathbb{R}^*, \forall b \in \mathbb{R}$
    b) $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, f(x) = \log x$.
    c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2|x|$.
    d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^7 - 3$.
    e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^4 + 2$.
    f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \cos(x)$.
    g) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^5+3}$.
    h) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}, f(n) = n^{(-1)^n}$.
    i) $f : \mathbb{R} \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], f(x) = \arctan(x)$.

12. Sia $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita in questo modo: $\varphi(n) := n^2, \forall n \in \mathbb{N}$;
    a) provare che non esiste alcuna applicazione che sia inversa a destra di φ,
    b) trovare due inverse sinistre di φ.

13. Sia $f : X \to X$ una applicazione t.c. $f \circ f = id_X$. Provare che f é biiettiva.

14. Date$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, determinare $f \circ g$, $g \circ f$ esplicitando se si tratta di funzioni iniettive, suriettive, determinando immagine e insieme quoziente, sul dominio, della relazione di equivalenza tra gli elementi mappati in uno stesso punto.
    a) $f(x) = 2x + 1, g(y) = 4y + 2$
    b) $f(x) = x^2, g(y) = y + 1$
    c) $f(x) = x + 3, g(y) = y^2 - 1$