Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AL110- 10 Dicembre 2010

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. Marco Fontana

Tutori: Cesare Catavitello e Alessandra Albanese

Tutorato 9
10 Dicembre 2010

1. Dimostrare che se $(G, \dot{})$ é un gruppo, G é commutativo se e solo se $(ab)^2 = a^2b^2$ per ogni a,$b \in G$.
2. Sia $A = \{1, 2, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$; e sia $H = \{f : A \to A|\ f$ é biiettiva$\}$:
   a) dimostrare che $(H, \circ)$ sia un gruppo;
   b) per ogni n calcolare il numero di elementi di H;
   c) posto $n = 3, 4$ calcolare il numero di elementi di H elencandoli tutti.
3. Dimostrare che $\forall n \in \mathbb{N}$, $(\mathbb{Z}_n, +)$, $(U(\mathbb{Z}_n), \cdot)$ sono gruppi determinando se sono abeliani.
4. Sia G un gruppomoltiplicativo, mostrare che $\forall x, y \in g, y = xyx^{-1}$ se e solo se $xy = yx$
5. Stabilire quali dei seguenti insiemi sono gruppi: $(\mathbb{N}, +)$; $(\mathbb{Z}, +)$;$(\mathbb{Z}, \cdot)$; $(\mathbb{Q}, \cdot)$; $(\mathbb{C}^*, \cdot)$; $(\mathbb{R}, +)$;$(\mathbb{R}^*, \cdot)$; $(\{-1, 1\}, \cdot)$.
6. Sia $(G, \cdot)$ un gruppo; dimostrare che: $\forall g \in G$, $gg = 1 \Rightarrow$ G é abeliano.
7. Sia $M_n(\mathbb{R})$ l'insieme delle matrici a valori reali e $GL_n(\mathbb{R})$, l'insieme delle matrici invertibili a valori reali. Sia $+_n$ la somma termine a termine e $\cdot_n$ il prodotto righe per colonne.
   Stabilire quali dei seguenti insiemi sono gruppi e in caso affermativo dimostrarlo:
   a) $(M_n(\mathbb{R}), +_n)$;
   b) $(M_n(\mathbb{R}), \cdot_n)$;
   c) $(GL_n(\mathbb{R}), +_n)$;
   d) $(GL_n(\mathbb{R}), \cdot_n)$;
8. Quali insiemi dell'esercizio precedente sono gruppi abeliani?
9. Provare che l'insieme $G = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}|x \neq 0\}$ é un gruppo rispetto all'operazione cosí definita:
   $(a, b) * (c, d) = (ac, bc + d)$
10. Stabilire se i seguenti insiemi sono gruppi rispetto a somma e prodotto usuali: $A = \{n^2|n \in \mathbb{N}\}$;$B = \{\frac{n^2}{m^2}|n, m \in \mathbb{N}, MCD(n, m) = 1\}$.
11. Dimostrare che $\forall n \in \mathbb{N}^*$, l'insieme $C_n := \{{\xi_n}^k, k \in \mathbb{Z}\}$, dove ξ_n é la radice primitiva n-esima dell'unitá, é un gruppo rispetto alla moltiplicazione. É un gruppo abeliano?