Avec les notations de la référence :

$$\lambda_1(U(0, 1), \sigma(\mathfrak{b}))\ldots\lambda_n(U(0, 1), \sigma(\mathfrak{b})).\mu(U(0, 1)) < 2^n \mu(D_{\mathfrak{b}}).$$

Les éléments $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ correspondent aux minima successifs : $\lambda_i(U(0, 1), \sigma(\mathfrak{b})) = d(\beta_i)/n$ car β_i est sur la frontière de $U(0, d(\beta_i)/n) = (d(\beta_i)/n).U(0, 1)$, d'où $\lambda_i(U(0, 1), \sigma(\mathfrak{b})) = d(\beta_i)/n = \theta_i N(\mathfrak{b})^{1/n}.N(\mathfrak{v})^{1/n}$ où $1 \leqq \tau = \theta_1 \leqq \theta_2 \ldots \leqq \theta_n$, d'où $\theta_1.\theta_2\ldots\theta_n.(N(\mathfrak{b})^{1/n}.N(\mathfrak{v})^{1/n})^n.(2^{r_1}(\pi/2)^{r_2}.n^n/n!) < 2^n.(2^{-r_2}.\sqrt{|\Delta|}.N(\mathfrak{b}))$ d'où *a fortiori* $\tau^n.N(\mathfrak{v}).2^{r_1+r_2}.(\pi/2)^{r_2}.(n^n/n!) < 2^n\sqrt{|\Delta|}$, d'où l'on déduit

$$(2) \qquad 2^n.\tau^n N(\mathfrak{v})/B < 2^n.$$

7. A partir des relations (1) et (2), on déduit la relation $k_A.P(B) < 2^n$, c'est-à-dire $2^{r_1+r_2}.\pi^{r_2}.R\,h/(w\sqrt{|\Delta|}) < 2^n/P(B)$, d'où le résultat.

C.Q.F.D.

Corollaire 4. — *Avec les notations précédentes, on obtient les inégalités suivantes :*

— *si* $B \leqq 17$, *alors* $R\,h < w(2/\pi)^{r_2}.6^n.\sqrt{|\Delta|}$;

— *si* $B > 17$, *alors* $R\,h < w(2/\pi)^{r_2}.(2\operatorname{Log}B)^n.\sqrt{|\Delta|}$.

Démonstration. — Pour $B \leqq 17$,

$$(3) \qquad 1/P(B) \leqq \left[\frac{1}{(1-1/2)\ldots(1-1/17)}\right]^n < 6^n.$$

Pour $B > 17$, $P(B) = \prod_{k=1}^{l}(1-1/N(\mathfrak{s}_k)) = \prod_{i=1}^{r}\left(\prod_{j=1}^{n_i}(1-1/p_i^{f_{ij}})\right)$, où $n_i \leqq n$ est le nombre d'idéaux de A au-dessus de p_i (et donc $l = n_1 + n_2 + \ldots + n_r$) d'où

$$P(B) \geqq \prod_{i=1}^{r}\left(\prod_{j=1}^{n_i}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)\right) \geqq \prod_{i=1}^{r}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)^n \geqq \prod_{p \leqq N(\mathfrak{s}_l)}\left(1-\frac{1}{p}\right)^n \geqq \prod_{p \leqq B}\left(1-\frac{1}{p}\right)^n;$$

en utilisant [1], théorème 13.13, p. 297, on peut montrer que, pour $B > 17$,

$$(4) \qquad P(B) > \left(\frac{0,5}{\operatorname{Log}B}\right)^n, \qquad \text{d'où} \quad 1/P(B) < (2\operatorname{Log}B)^n.$$

En fait on prend 0,5 comme minorant de e^{-c}, c constante d'Euler où $e^{-c} = 0,56145\ldots$ dans la formule

$$(5) \qquad \prod_{p \leqq B}(1-1/p) = \frac{e^{-c}}{\operatorname{Log}B} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\operatorname{Log}B)^2}\right).$$

Le corollaire résulte des inégalités (3) et (4) et du théorème précédent.

Remarque. — La majoration de $1/P(B)$ par $(2\operatorname{Log}B)^n$ est effective mais grossière. Une généralisation de (5) aux corps de nombres devrait permettre de montrer que $1/P(B) = O(\operatorname{Log}B)$.

Note reçue le 21 septembre 1987, acceptée le 26 octobre 1987.

Références bibliographiques

[1] T. M. Apostol, *Introduction to analytic number theory*, Springer Verlag, 1984.
[2] R. Brauer, On the zeta functions on algebraic number fields, *Amer. J. Math.*, 69-2, 1947, p. 243-250.
[3] C. G. Lekkerkerker, *Geometry of Numbers*, North Holland, 1969.
[4] D. Marcus, *Number Fields*, Springer Verlag, 1977.
[5] P. Samuel, *Théorie Algébrique des Nombres*, Hermann, 1971.
[6] S. Lang, *Algebraic Number Theory*, Addison Wesley, 1970.

32, *Hameau de la Caravelle*, 91650 *Breuillet.*

C. R. Acad. Sci. Paris, t. 306, Série I, p. 11-16, 1988

Algèbre/*Algebra*

Sur les suites dimensionnelles et une classe d'anneaux distingués qui les déterminent

David E. DOBBS et Marco FONTANA

Résumé — Nous construisons explicitement la suite dimensionnelle de tout anneau de P^nVD, caractérisons l'ensemble de ces suites dimensionnelles et montrons que toute suite dimensionnelle peut être réalisée par un anneau intègre semilocal qui est intégralement clos et localement de P^nVD.

On dimension sequences and a class of distinguished rings which determine them

Abstract — *We explicitly construct the dimension sequence of each* P^nVD, *characterize the set of such dimension sequences and show that each dimension sequence can be realized by a semilocal integrally closed integral domain which is locally* P^nVD.

Abridged English Version — This Note concerns the P^nVD rings (*pseudo-valuation rings of type n*), a class of local seminormal domains introduced in [6]. We explicitly construct the dimension sequence of each P^nVD, characterize the set of such dimension sequences, and show that each dimension sequence can be realized by a semilocal domain that is locally P^nVD.

The P^nVD rings can be characterized as fiber products, generalizing the composition of "valuation rings" in the sense of Nagata [9]. It is convenient to let P^{-1}VD denote any valuation domain; let P^0VD denote any pseudovaluation domain, in the sense of Hedstrom-Houston [7]. As in [2], a P^0VD can be characterized as $V \times_K k$, where V is a valuation domain, whose residue field K contains the field k; it is useful to attach the parameters $\alpha = \dim(V)$ and $\delta = \text{t.d.}(K/k)$. As shown in [6], a P^nVD (which is not a P^{n-1}VD) can be viewed as $W \times_k D$, where D is a P^0VD with (parameters α_{n+1}, δ_{n+1} and) quotient fields k and W a P^{n-1}VD with (parameters $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $\delta_1, \ldots, \delta_n$ and) residue field k. To avoid trivialities, we suppose each α_i is a positive integer and $1 \leqq \delta_1 \leqq \delta_2 \leqq \ldots \leqq \delta_{n+1} \leqq \infty$. It can be shown that a P^nVD has a totally ordered prime spectrum.

For each finite dimensional ring A, its *dimension sequence* $\{n_0, n_1, n_2, \ldots\}$ is defined by $n_0 = \dim(A)$, $n_j = \dim(A[X_1, X_2, \ldots, X_j])$ for all $j > 0$; its associated *difference sequence* $\{d_1, d_2, \ldots\}$ is given by $d_j = n_j - n_{j-1}$. As in [3], $\mathcal{S}$ denotes the set of sequences $\{n_0, n_1, n_2, \ldots\}$ of nonnegative integers such that $1 \leqq n_{j+1} - n_j \leqq n_j - n_{j-1} \leqq n_0 + 1$ for all $j \geqq 1$. Arnold-Gilmer [3] have shown, among other important results, that each dimension sequence takes the form $\sup\{S_1, \ldots, S_t\}$ for a suitable finite set $\{S_i\} \subseteqq \mathcal{S}$.

Our first principal result, Theorem 2, concerns a P^nVD ring R, with parameters as above. Using results on fibre products, including some unpublished work of Anderson-Bouvier-Kabbaj and the authors [1], we prove by induction on n that

$$\dim(R[X_1, \ldots, X_j]) = \left(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i\right) + j + \sum_{i=1}^{n+1} \inf\{j, \alpha_i\} \quad \text{for each } j \geqq 0.$$

It follows that the associated difference sequence is given by $d_j := n+2$ if $1 \leqq j \leqq \delta_1$; $n+1$ if $\delta_1 < j \leqq \delta_2$; ...; 2 if $\delta_n < j \leqq \delta_{n+1}$; and 1 if $\delta_{n+1} < j$. We may then conclude that $\sum_{i=1}^{n+1} (\alpha_i + \delta_i)$ is the valuative dimension of R.

Note présentée par Jean DIEUDONNÉ.

0249-6291/88/03060011 $ 2.00

Corollary 3 concerns any $S=\{n_0, n_1, n_2, \ldots\} \in \mathcal{S}$, with associated difference sequence $\{d_j\}$. We show that there exists a P^n VD, R, with dimension sequence S. If $n_0 \neq 0$, we can choose R to be integrally closed or not. (The case $n_0=0$ is a wellknown trivial case). If $d_1=1$, we can choose $n \leqq 0$, while, if $d_1>1$ and $n=d_1-2$, we let δ_1 be the number of indexes such that $d_j=n+2$; if $\delta_1 \neq \infty$, $\delta_2-\delta_1$ be the number of indexes such that $d_j=n+1$; ...; if $\delta_n \neq \infty$, $\delta_{n+1}-\delta_n$ be the number of indexes such that $d_j=2$. The parameters α's can be chosen in different ways, for instance it is convenient to set $\alpha_1=n_0-n$, and $\alpha_2=\alpha_3=\ldots=\alpha_{n+1}=1$. Using these parameters, we sketch the explicit construction of a P^n VD of any characteristic, with the prescribed dimensional sequence.

Corollary 4 concerns an arbitrary dimension sequence $S=\{n_0, n_1, n_2, \ldots\}$. Using Corollary 3 and generalizing a method of Arnold-Gilmer [3], we construct a semilocal domain R which is locally P^n VD and has dimension sequence S. We can choose such R to be integrally closed or, if $S \neq \{0, 1, 2, \ldots\}$, to be not integrally closed. Example 5 illustrates the preceding construction for the particular $S=\{3, 5, 6, 8, 9, 10, \ldots\}$, which is not in $\mathcal{S}$.

1. Introduction. — Cette Note concerne les anneaux de P^n VD (*pseudo-valuation de type n*), une classe d'anneaux intègres locaux et semi-normaux qui a été introduite dans [6]. L'intérêt pour ces anneaux est dû, en partie, au résultat suivant de Seidenberg [11] : si X est une indéterminée sur un anneau (commutatif) A, alors

$$\dim(A)+1 \leqq \dim(A[X]) \leqq 2\dim(A)+1,$$

où l'on note par dim la dimension au sens de Krull. En effet, dans [6], théorème 2.1, on construit explicitement pour deux entiers d, e avec $d \geqq e \geqq 0$, un anneau de P^n VD, R, tel que $\dim(R)=d$ et $\dim(R[X])=d+e+1$. Dans cette Note, nous construisons explicitement la suite dimensionnelle de tout anneau de P^n VD, caractérisons l'ensemble de ces suites dimensionnelles, et montrons que toute suite dimensionnelle peut être réalisée par un anneau intègre semi-local qui est intégralement clos et localement de P^n VD.

Les anneaux de P^n VD peuvent être caractérisés comme des produits fibrés, en généralisant « la composition des anneaux de valuation » au sens de Nagata ([9], 11.4). Bien qu'on considère les anneaux de P^n VD seulement pour $n \geqq 0$, il sera convenable de noter par P^{-1} VD tout anneau de valuation; et par P^0 VD, tout anneau de pseudo-valuation au sens de [7]. Comme il a été établi dans [2], proposition 2.6, un anneau de pseudo-valuation R peut être caractérisé comme $V \times_K k$, où V est un anneau de valuation dont le corps résiduel K contient le corps k; il est utile d'attacher à R les paramètres $\alpha=\dim(V)$ et $\delta=\mathrm{d.t.}(K/k)$. Par [6], théorème 1.9, un anneau de P^n VD (qui n'est pas de P^{n-1} VD) peut être vu comme $R=W \times_k D$ où D est un anneau de pseudo-valuation avec (paramètres α_{n+1}, δ_{n+1} et) corps des fractions k et W est un anneau de P^{n-1} VD avec (paramètres $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \delta_1, \ldots, \delta_n$ et) corps résiduel k.

Pour éviter des cas banals on supposera que tout α_j est un entier positif et tout δ_j est soit un entier positif, soit ∞. Également, il suffira de se borner au cas $\delta_1 \leqq \delta_2 \leqq \ldots \leqq \delta_{n+1}$.

Pour tout anneau A de dimension finie, sa *suite dimensionnelle* $\{n_0, n_1, n_2, \ldots\}$ est définie par $n_0=\dim(A)$, $n_j=\dim(A[X_1, \ldots, X_j])$ pour tout entier $j \geqq 1$; la *suite de différences* associée, $\{d_1, d_2, \ldots\}$ est donnée par $d_j=n_j-n_{j-1}$. D'après Arnold-Gilmer [3], on note par $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites $\{n_0, n_1, n_2, \ldots\}$ des entiers non négatifs telles que $1 \leqq n_{j+1}-n_j \leqq n_j-n_{j-1} \leqq n_0+1$ pour tout $j \geqq 1$. Un résultat fondamental ([3], Theorem 4.4) constate que toute suite dimensionnelle prend la forme $\mathrm{Sup}\{S_1, \ldots, S_t\}$

pour un ensemble fini convenable $\{S_i\} \subseteq \mathscr{S}$. Les suites dimensionnelles ont été caractérisées d'une façon intrinsèque dans [10]. Les résultats principaux de cette Note sont le calcul explicite de la suite dimensionnelle d'un anneau de P^n VD (*voir* théorème 2) et une preuve directe (*voir* corollaire 3) que toute suite $\{n_j\} \in \mathscr{S}$ peut être réalisée par un anneau de P^n VD qui est intégralement clos. La démonstration du corollaire 4 sera achevée en généralisant quelques idées d'Arnold-Gilmer [3].

2. LES SUITES DIMENSIONNELLES DES ANNEAUX DE P^n VD. — Afin de faciliter la compréhension, nous commençons par énoncer quelques résultats non encore publiés.

LEMME 1 ([3], proposition 2.3(*a*) et corollaire 2.8). — *Soient* T *un anneau intègre local avec corps résiduel* k *et* D *un sous-anneau de* k. *Soit* $R = T \times_k D$.

(*a*) *Si* k *est le corps des fractions de* D, *alors*

$$\dim(R[X_1, \ldots, X_j]) = \dim(D[X_1, \ldots, X_j]) + \dim(T[X_1, \ldots, X_j]) - j$$

pour tout entier $j \geqq 0$.

(*b*) *Si* R *est un anneau de valuation, mais pas un corps, et si* F *désigne le corps des fractions de* D, *alors*

$$\dim(R[X_1, \ldots, X_j]) = \dim(T) + \dim(D[X_1, \ldots, X_j]) + \inf\{\text{d. t.}(k/F), j\}$$

pour tout entier $j \geqq 1$.

THÉORÈME 2. — *Soit* R *un anneau de* P^n VD. *Alors, en conservant les notations de l'introduction, on a :*

(*a*) $\dim(R[X_1, \ldots, X_j]) = \left(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i\right) + j + \sum_{i=1}^{n+1} \inf\{j, \delta_i\}$ *pour tout entier* $j \geqq 0$;

(*b*) *la suite de différences de* R *est donnée par*

$$d_j = \begin{cases} n+2 & si \quad 1 \leqq j \leqq \delta_1 \\ n+1 & si \quad \delta_1 < j \leqq \delta_2 \\ n & si \quad \delta_2 < j \leqq \delta_3 \\ \vdots & \\ 2 & si \quad \delta_n < j \leqq \delta_{n+1} \\ 1 & si \quad \delta_{n+1} < j ; \end{cases}$$

(*c*) $\dim_v(R)$, *la dimension valuative de* R, *est finie si, et seulement si,* $\delta_i < \infty$ *pour tout* $i = 1, \ldots, n+1$ (*c'est-à-dire, si et seulement si* $\delta_{n+1} < \infty$). *Dans ce cas,* $\dim_v(R) = \sum_{i=1}^{n+1} (\alpha_i + \delta_i)$.

Démonstration. — (*a*) $R = W \times_k D$ où D est un anneau de pseudo-valuation et W est un anneau de P^{n-1} VD, comme dans l'introduction. Or, $\dim(D) = \alpha_{n+1}$ et, par récurrence sur n, $\dim(W) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$. L'assertion pour $j = 0$ découle facilement des faits généraux sur les produits fibrés (*cf.* [5], Theorem 1.4).

Quant au cas $j > 0$, supposons d'abord que R est un anneau de pseudo-valuation (c'est-à-dire, un anneau de P^0 VD). Alors, $R = V \times_K k$ où V est un anneau de valuation dont le corps résiduel K contient le corps k. Par le lemme 1(*b*), en évitant le cas évident d'un anneau de valuation, c'est-à-dire, en supposant que $k \neq K$, on a

$$\begin{aligned} \dim(R[X_1, \ldots, X_j]) &= \dim(V) + \dim(k[X_1, \ldots, X_j]) + \inf\{\text{d. t.}(K/k), j\} \\ &= \alpha_1 + j + \inf\{\delta_1, j\}. \end{aligned}$$

Ensuite, considérons le cas d'un anneau R de P^1 VD. Bien que ce cas ne soit pas strictement nécessaire pour la récurrence, il permet de mieux comprendre le procédé. Dans ce cas, on a un diagramme

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[rr, two heads] \arrow[dd, hook] & & D \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & k_2 \arrow[d, hook] \\
& & V_2 \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & K_2 \\
W \arrow[rr, two heads] \arrow[d, hook] & & k_1 \arrow[d, hook] & \\
V_1 \arrow[rr, two heads] & & K_1 &
\end{tikzcd}$$

de carrés cartésiens. Soient $\delta_i = \text{d. t. } (K_i/k_i)$ et V_i un anneau de valuation de dimension α_i; alors par le lemme 1 (*b*), en supposant V_1 non banal, on a

$$\begin{aligned}\dim(R[X_1, \ldots, X_j]) &= \dim(V_1) + \dim(D[X_1, \ldots, X_j]) + \inf\{\text{d. t.}(K_1/k_1), j\}\\ &= \alpha_1 + \dim(D[X_1, \ldots, X_j]) + \inf\{\delta_1, j\}.\end{aligned}$$

Donc, l'assertion (pour $n=1$) est une conséquence de l'équation

$$\dim(D[X_1, \ldots, X_j]) = \alpha_2 + j + \inf\{\delta_2, j\},$$

mais celle-ci résulte directement du lemme 1 (*b*) parce que $\dim(k_2[X_1, \ldots, X_j]) = j$.

Le cas général s'établit par récurrence sur n. Soit $R = W \times_k D$ un anneau de P^n VD, comme dans l'introduction, avec $n \geqq 2$. Or, par le lemme 1 (*a*), on a

$$\dim(R[X_1, \ldots, X_j]) = \dim(D[X_1, \ldots, X_j]) + \dim(W[X_1, \ldots, X_j]) - j.$$

Mais, par le cas (*voir* ci-dessus) d'un anneau de pseudo-valuation,

$$\dim(D[X_1, \ldots, X_j]) = \alpha_{n+1} + j + \inf\{j, \delta_{n+1}\}.$$

D'ailleurs, par l'hypothèse inductive,

$$\dim(W[X_1, \ldots, X_j]) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + j + \sum_{i=1}^{n} \inf\{j, \delta_i\}.$$

L'affirmation (*a*) en découle immédiatement.

(*b*) résulte facilement de l'affirmation (*a*), d'après la définition de d_j.

(*c*) Par [8], $\dim_v(R) = \nu < \infty$ si, et seulement si,

$$\dim(R[X_1, \ldots, X_j]) = \nu + j \text{ pour tout } j \gg 0.$$

En particulier, $\dim_v(R) < \infty$ implique que $d_j = 1$ pour $j \gg 0$ et donc, par (*b*), que $\delta_{n+1} < \infty$. Par (*a*), ces remarques donnent aisément l'affirmation (*c*), ce qui achève la preuve du théorème 2.

Soit R un anneau de P^n VD avec suite de différences $\{d_j\}$. Il résulte du théorème 2 qu'il existe un entier $N \geqq 1$ tel que $d_N = 1$ si, et seulement si, $\dim_v(R) < \infty$. En effet, la même affirmation est valable pour tout anneau intègre R (*cf.* [3], (4.5.6)). Mais, comme nous allons le démontrer ci-dessous, la condition $d_N = 1$ est naturellement liée à certains anneaux de P^n VD.

COROLLAIRE 3. — *Soit* $S = \{n_0, n_1, n_2, \ldots\} \in \mathscr{S}$, *et notons* $\{d_j\}$ *la suite de différences associée. Alors, il existe un anneau* R *de* P^n VD, *dont* S *est la suite dimensionnelle.* (R *est de dimension valuative finie si, et seulement si, il existe un entier* $N \geqq 1$ *tel que* $d_N = 1$.) *En outre, si* $n_0 \neq 0$, *on peut choisir* R *de façon qu'il soit intégralement clos ou bien qu'il ne le* *soit pas. Si $d_1=1$, on peut choisir $n \leqq 0$. De plus, si $d_1>1$, on peut faire en sorte que n soit égal à d_1-2.*

Démonstration. — Pour éviter le cas banal, on peut supposer que $n_0 \neq 0$, c'est-à-dire, $S \neq S_0=\{0, 1, 2, \ldots\}$. En effet, S_0 est réalisée par tout corps.

Si R est un anneau de pseudo-valuation de dimension n_0 tel que sa clôture intégrale soit son anneau de valuation associé, alors sa suite dimensionnelle est $\{n_0, n_0+1, n_0+2, \ldots\}$, avec suite de différences $\{1, 1, \ldots\}$ (*cf.* [8]. En effet, R est « un anneau de Jaffard », dans la terminologie de [1]). Donc, on peut supposer que $d_1>1$. Dans ce cas, on détermine n et $\delta_1 \leqq \ldots \leqq \delta_{n+1}$ comme suit :

$$n=d_1-2;$$

$\delta_1=$ le nombre d'indices j tel que $d_j=n+2$;

si $\delta_1 \neq \infty$, $\delta_2-\delta_1=$ le nombre d'indices j tels que $d_j=n+1$;

$\vdots$

si $\delta_n \neq \infty$, $\delta_{n+1}-\delta_n=$ le nombre d'indices j tels que $d_j=2$.

En vue du théorème 2, nous allons créer un anneau R de P^nVD, construit à partir d'anneaux de valuation V_i de dimension α_i et d'extensions de corps convenables $k_i \subset K_i$, tel que $\delta_i=\mathrm{t.d.}(K_i/k_i)$ et $\sum \alpha_i=n_0$. Puisque la définition de $\mathscr{S}$ implique que $n_0+1 \geqq d_1=n+2$, il en résulte que $n_0-n \geqq 1$. Donc, on peut choisir α_i de plusieurs manières, par exemple, en posant $\alpha_1=n_0-n$ et $\alpha_2=\ldots=\alpha_{n+1}=1$. Enfin, il résulte de la théorie des carrés cartésiens (*cf.* [6], corollaire 1.4 (*a*)) qu'un tel R est intégralement clos si, et seulement si, k_i est algébriquement clos dans K_i pour tout i. La démonstration est complète.

Nous avons énoncé qu'il n'est pas restrictif de supposer que $\delta_1 \leqq \delta_2 \leqq \ldots \leqq \delta_{n+1}$. En effet, si R est un anneau de P^nVD arbitraire, alors, par le théorème 2 (*a*), sa suite dimensionnelle S est dans $\mathscr{S}$. Donc, par la construction donnée dans la démonstration du corollaire 3, nous pouvons trouver un anneau R' de P^nVD avec la même suite dimensionnelle S et pour lequel $\delta'_1 \leqq \delta'_2 \leqq \ldots \leqq \delta'_{n+1}$.

Corollaire 4. — *Soit* $S=\{n_0, n_1, n_2, \ldots\}$ *une suite dimensionnelle. Alors, il existe un anneau intègre semilocal* R *qui soit localement de* P^nVD *et dont la suite dimensionnelle soit* S.

On peut choisir un tel anneau R *de façon qu'il soit intégralement clos, ou bien, à part le cas* $S=\{0, 1, 2, \ldots\}$, *qu'il ne le soit pas.*

Démonstration. — Nous rappelons que $S=\mathrm{Sup}\{S_1, \ldots, S_t\}$ pour un ensemble fini convenable $\{S_i\} \subseteq \mathscr{S}$. Donc, s'il existe un anneau intègre semilocal R tel que $\mathrm{Max}(R)=\{M_1, \ldots, M_t\}$ et S_i est la suite dimensionnelle de R_{M_i} pour tout i, alors [3] (corollary 2.10) implique que S est la suite dimensionnelle de R. Afin de construire un tel anneau R, considérons un corps F assez grand de telle façon, que la méthode du corollaire 3 nous permette d'y trouver des anneaux de valuation $V_1, \ldots, V_t$ de dimension 1 tels que $V_i \not\subseteq V_j$ si $i \neq j$, et tels que, pour tout i, le corps résiduel K_i, de V_i, contienne un anneau D_i de P^{n_i}VD, tel que S_i soit la suite dimensionnelle de $R_i=V_i \times_{K_i} D_i$. Soient $W=\bigcap V_i$ et $R=W \times_{\Pi K_i} \prod D_i$. Évidemment $R=\bigcap R_i$. Or, en localisant le carré cartésien qui a défini R, on peut montrer que $\{R_M : M \in \mathrm{Max}(R)\}=\{R_i\}$. (*Voir* les preuves de [1], proposition 2.18 et corollary 2.19).) Puisque R est intégralement clos si, et seulement si, R_i est intégralement clos pour tout i, la dernière partie du présent énoncé découle de la dernière partie de l'énoncé du corollaire 3. Ceci achève la démonstration.

Exemple 5. — Soit $S=\{3, 5, 6, 8, 9, 10, \ldots\}$. D'après [10], S est une suite dimensionnelle. Cependant, $S \notin \mathscr{S}$, puisque sa suite de différences n'est pas décroissante. Donc, aucun anneau de $P^n VD$ ne réalise S comme suite dimensionnelle. Par la méthode du corollaire 4, nous trouverons un anneau R, localement de $P^n VD$, qui ait S comme suite dimensionnelle. Considérons neuf indéterminées $Y_1, Y_2, \ldots, Y_5, X_1, X_2, X_3, X_4$ sur un corps k. Soient $K=k(Y_1, Y_2, \ldots, Y_5)$ et

$$R_1=K+X_2 K(X_1)[X_2]_{(X_2)}+X_3 K(X_1, X_2)[X_3]_{(X_3)}+X_4 K(X_1, X_2, X_3)[X_4]_{(X_4)}.$$

Alors, R_1 est un anneau de $P^0 VD$, muni de paramètres $\alpha_1=3$, $\delta_1=1$. Donc, la suite dimensionnelle de R_1 est $S_1=\{3, 5, 6, 7, 8, 9, \ldots\}$.

Soient $L=k(X_1, X_2, X_3, X_4)$ et

$$R_2=L+Y_4 L(Y_1, Y_2, Y_3)[Y_4]_{(Y_4)}+Y_5 L(Y_1, \ldots, Y_4)[Y_5]_{(Y_5)}.$$

Alors, R_2 est aussi un anneau de $P^0 VD$, ses paramètres sont 2 et 3, et donc sa suite dimensionnelle est $S_2=\{2, 4, 6, 8, 9, 10, \ldots\}$. Enfin, le corollaire 4 s'applique, avec $F=k(Y_1, \ldots, Y_5, X_1, \ldots, X_4)$ et $R=R_1 \cap R_2$, car la suite dimensionnelle de R est $\operatorname{Sup}\{S_1, S_2\}=S$ et les localisations de R en ses idéaux maximaux sont R_1 et R_2.

Pour conclure, nous ferons quelques remarques. Par la considération des produits fibrés plus généraux que ceux de type $D+M$, nos méthodes ont donné des preuves courtes et claires; elles ont mis en évidence la raison pour laquelle toute suite dimensionnelle, sauf $\{0, 1, 2, \ldots\}$, peut être réalisée par un anneau intègre non nécessairement intégralement clos; elles ont permis d'effectuer une étude approfondie et générale des anneaux particuliers qui ont été construits dans les preuves de [3] en fournissant une autre raison d'intérêt pour les anneaux de $P^n VD$ et, plus généralement, pour les anneaux qui sont localement divisés au sens de [4].

Note reçue le 6 juillet 1987, acceptée le 2 octobre 1987.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] D. F. ANDERSON, A. BOUVIER, D. E. DOBBS, M. FONTANA et S. KABBAJ, On Jaffard domains, *Expositiones Math.* (à paraître).

[2] D. F. ANDERSON et D. E. DOBBS, On pairs of rings with the same prime ideals, *Canad. J. Math.*, 32, 1980, p. 362-384.

[3] J. T. ARNOLD et R. GILMER, The dimension sequence of a commutative ring, *Amer. J. Math.*, 96, 1974, p. 385-408.

[4] D. E. DOBBS, On locally divided integral domains and CPI overrings, *Inter. J. Math. and Math. Sci.*, 4, 1981, p. 119-135.

[5] M. FONTANA, Topologically defined classes of commutative rings, *Ann. Mat. Pura Appl.*, 123, 1980, p. 331-355.

[6] M. FONTANA, Sur quelques classes d'anneaux divisés, *Rend. Sem. Mat. e Fis. di Milano*, 51, 1981, p. 179-200.

[7] J. R. HEDSTROM et E. G. HOUSTON, Pseudo-valuation domains, *Pacific J. Math.*, 75, 1978, p. 137-147.

[8] P. JAFFARD, *Théorie de la dimension dans les anneaux de polynômes*, Gauthier-Villars, Paris, 1960.

[9] M. NAGATA, *Local rings*, Interscience, New York, 1962.

[10] T. PARKER, A number theoretic characterization of dimension sequences, *Amer. J. Math.*, 97, 1975, p. 308-311.

[11] A. SEIDENBERG, A note on dimension theory of rings, *Pacific J. Math.*, 3, 1952, p. 505-512.

D. E. D. : *Department of Mathematics, University of Tennessee, Knoxville, Tennessee* 37996-1300, *U.S.A.;*

M. F. : *Dipartimento di Matematica, Università di Roma, « La Sapienza »*, 00185 *Roma, Italia* et *Département de Mathématiques, Université de Lyon-I*, 69622 *Villeurbanne.*