MARCO FONTANA
dell'Università di Roma

SUR QUELQUES CLASSES D'ANNEAUX DIVISÉS (*)

(*Conferenza tenuta il 8 novembre 1981*)

SUNTO. — Si introducono i domini di pseudo-valutazione di tipo n, per ogni $n \geq 0$, i quali risultano particolari domini divisi, nel senso di Akiba [1] e Dobbs [8], e generalizzano i « classici » domini di pseudo-valutazione di Hedstrom-Houston [19]. Si dimostrano varie proprietà di questi anelli, quali quella di essere seminormali, ma non normali, in generale, e quella di essere « generati » iterando un'operazione di prodotto fibrato di anelli di pseudo-valutazione (che estende l'operazione di composizione di anelli di valutazione, cfr. Nagata [25, p. 35]). I principali risultati qui ottenuti consistono in una caratterizzazione degli anelli di pseudo-valutazione di tipo n tali che l'anello dei polinomi è catenario e nella possibilità di costruire *esplicitamente* un anello (di pseudo-valutazione di tipo n opportuno), R, tale che, presi comunque due interi $d \geq e \geq 0$, risulti $\dim(R) = d$, $\dim(R[X]) = d + e + 1$ (cfr. Seidenberg [29]).

0. - INTRODUCTION.

Si A est un anneau noethérien, W. Krull a montré que $\dim(A[X]) = \dim(A) + 1$. Successivement, A. Seindenberg [29] a prouvé qu'une telle égalité est encore valable dans le cas d'un anneau de Prüfer. Bien que ces deux classes d'anneaux soient très différentes, les résultats précédents ont été retrouvés, en même temps, par P. Jaffard [21], comme conséquence d'une étude sur la structure des chaînes d'idéaux premiers de l'anneau $A[X]$ à partir des spécialisations des corps de fractions des anneaux $A/\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}$ parcourant l'ensemble des idéaux premiers de A (en bref, Spec(A)). Plus récemment, I. Kaplansky [22] a traité ces deux cas (au moins) d'une façon unifiée, au moyen de la notion de S(eindenberg)-anneau fort.

(*) *Classificazione AMS* (*MOS*) 1980: 13 A 17, 13 A 18, 13 B 25, 13 C 15, 13 F 05, 13 F 25.

En général, il est bien connu que, quel que soit l'anneau A, on a les inégalités:

$$\dim(A) + 1 \leq \dim(A[X]) \leq 2\dim(A) + 1$$

et que ces inégalités ne peuvent pas être améliorées, car Seidenberg [29; Theorem 3, p. 605] a montré que:

(**S**) *Si* d *et* e *sont deux entiers donnés à l'avance,* $\mathrm{d} \geq \mathrm{e} \geq 0$, *alors il existe un anneau* A *tel que* $\dim(\mathrm{A}) = \mathrm{d}$ *et* $\dim(\mathrm{A}[\mathrm{X}]) = \mathrm{d} + \mathrm{e} + 1$.

La preuve de Seidenberg se fait par récurrence sur la dimension de l'anneau A et l'idée qui est à la base de la récurrence remonte essentiellement à la construction donnée par Krull [23] d'un anneau local intègre intégralement clos de dimension 1, qui n'est pas un annau de valuation. Un tel anneau, faisant appel aux notations plus récentes mises au point par Gilmer dans le contexte des $D + \mathfrak{M}$ anneaux [16, Appendix 2], peut s'écrire $k + Xk(Y)\,[X]_{(X)}$, k étant un corps et X, Y deux indétrminées sur k.

Le but principal de ce papier est celui de construire *explicitement* des classes d'anneaux qui vérifient la propriété (**S**) ci-dessus, en exploitant au maximum les idées originaires de Seidenberg. En outre, pour de tellés classes d'anneaux, il est montré que la propriété de l'anneau de polynômes d'être catenaire est caractérisée par le comportement de la dimension (cf. Théorèmes 2.1 et 2.2).

Pour parvenir à ces résultats, nous aurons besoin d'introduire et étudier des anneaux qui généralisent, sous plusieurs aspects, les anneaux de (pseudo-) valuation, mais qui, toutefois, restent des anneaux divisés.

Rappelons qu'un *idéal premier* $\mathfrak{p}$ d'un anneau intègre A est dit *divisé* si une quelconque des affirmations équivalentes suivantes est satisfaite:

(i) $\mathfrak{p} = \mathfrak{p} A_{\mathfrak{p}}$;

(ii) $A = A + \mathfrak{p} A_{\mathfrak{p}}$;

(iii) le diagramme d'homomorphismes canoniques d'anneaux:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & A/\mathfrak{p} \arrow[d, hook] \\
A_{\mathfrak{p}} \arrow[r, two heads] & k(\mathfrak{p})
\end{tikzcd}$$

est cartésien, i.e. $A \cong A_{\mathfrak{p}} \times_{\mathfrak{k}(\mathfrak{p})} A/\mathfrak{p}$ ($\mathfrak{k}(\mathfrak{p})$ étant le corps résiduel de l'anneau local $A_{\mathfrak{p}}$ ou, ce qui revient au même, le corps de quotients de $A/\mathfrak{p}$) (cf. [1], [8], [14]).

Un *anneau divisé* (en bref, *DD*) est un anneau intègre dont tout idéal premier est divisé.

Les anneaux divisés ont été introduits par T. Akiba [1] sous le nom de *AV* (= *almost valuation*)*-anneaux*. Successivement, une étude systématique et approfondie de ce genre d'anneaux a été développée par D. Dobbs [8] (surtout en relation aux *GD* (= going-down)-anneaux [12]), auquel on doit aussi la présente dénomination. Signalons que le spectre premier d'un anneau divisé est totalement ordonné (cf. [8, Prop. 2.1] et [12, (4.3)]), donc, en particulier, tout anneau divisé est local, et, pour les anneaux locaux intégralement clos, S. McAdam [24, Cor. 11] a montré que la notion d'anneau divisé est équivalente à la notion de *GD*-anneau. Pour compléter les informations sur cette classe d'anneaux, nous signalons aussi que d'autres propriétés et situations étroitement liées à la notion d'idéal (et anneau) divisé ont été étudiées par Boisen-Sheldon [4] (en relation à la structure d'ordre du Spectre premier), Greenberg [17], [18] (en relation aux anneaux cohérents, à ceux de dimension globale 2 (anneaux à ombrelle, cf. aussi Vasconcelos [31, p. 384]) et, plus généralement, aux *F*-anneaux), E. D. Davis [6] (en relation aux couples intégralement clos). Pour d'autres détails nous renvoyons à [14].

Les anneaux de pseudo-valuation sont parus explicitement, pour la première fois, dans un papier de Hedstrom-Houston [19]. Rappelons que, si A est un anneau intègre et F est son corps des fractions, alors A est appelé *anneau de pseudo-valuation* (en bref, *PVD*) si une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite:

(i) pour tout $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ et $x \in K \setminus A$, $x^{-1}\,\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}$;

(ii) pour tout $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ et $x \in K$, les idéaux xA et $\mathfrak{p}$ sont comparables:

(iii) il existe un anneau de valuation $(V, \mathfrak{m}, K = V/\mathfrak{m})$ un sous-corps k de K, et un diagramme cartésien d'homomorphismes d'anneaux:

$$(\square) \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, hook] & k \arrow[d, hook, "v"] \\ V \arrow[r, "u"] & K \end{tikzcd}$$

u étant la projection canonique et v l'inclusion.

Dans cette situation, si on identifie A avec son image dans V, on a que:

(a) $\mathfrak{m} \cap A = \mathfrak{m}$ est le conducteur de $A \hookrightarrow V$; donc, en particulier si $\mathfrak{m} \neq (0)$, A et V ont le même corps de fractions et, dans celui-ci, la même clôture intégrale complète;

(b) $\mathrm{Spec}(V) = \mathrm{Spec}(A)$ et, pour tout idéal premier de A (ou V) $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$, $A_\mathfrak{p} \cong V_\mathfrak{p}$;

(c) si A n'est pas un anneau de valuation, l'anneau de valuation dans ($\square$) est univoquement déterminé par A, plus exactement:

$$V = (\mathfrak{m} :_F \mathfrak{m}) = (A :_F \mathfrak{m}) = \mathfrak{m}^{-1}.$$

Pour la démonstration des résultats énoncés ci-dessus, nous renvoyons aux papiers de Hedstrom-Houston [19, Prop. 1.2], Anderson [2, Prop. 4.1], Anderson-Dobbs [3, Prop. 2.6], Dobbs-Fontana [10, Th. 1], Fontana [15, Th. 1.0].

L'étude des anneaux de polynômes à coefficients dans un *PVD* a été commencée dans un papier ultérieur par Hedstrom-Houston [20]. A cet égard, le résultat principal est une caractérisation des *PVDs* qui sont aussi des S-anneaux forts [20; Rk. 2.3, Prop. 2.4, Th. 2.5, Rk. 2.6].

* * *

Dans le présent papier, tous les anneaux considérés sont commutatifs unitaires. Tout homomorphisme envoie l'élément neutre dans l'élément neutre. Par sur-anneau d'un anneau intègre A on entend un sous-anneau du corps de fractions de A qui contient, comme sous-anneau, A.

Pour terminer, je tiens à remercier A. Bouvier, F. Burq, D. Dobbs et G. Germain pour les conversations stimulantes et utiles engagées pendant la préparation de ce travail.

1. - Anneaux de pseudo-valuation de type n.

Dans ce paragraphe, nous nous proposons d'introduire une classe d'anneaux divisés, qui contient la classe des anneaux de pseudo-valuation et qui est stable par l'opération de composition d'après Nagata [25, p. 35]. Plus précisément, soient $(A, \mathfrak{m}, K = A/\mathfrak{m})$ et $(B, \mathfrak{n}, k = B/\mathfrak{n})$ deux anneaux de valuation tels que B soit contenu dans K, alors l'anneau $R = A \times_K B$ est un anneau de valuation si, et seulement si, K est isomorphe au corps de fractions de B. Dans ce cas, l'anneau R est appelé l'*anneau de valuation composé de* A *et* B. Se pose naturellement la question d'étudier les anneaux qui naissent de l'opération de produit fibré d'anneaux de valuation, sans la condition que K soit (isomorphe à) le corps des fractions de B.

Tout d'abord, notons que si A est un anneau de valuation (en bref, *VD*), alors tout idéal premier $\mathfrak{p}$ dans A est divisé et, en outre, il est tel que:

($\wedge$) $A/\mathfrak{p}$ est un *VD*;

($\vee$) $A_{\mathfrak{p}}$ est un *VD*.

Nous voulons montrer que la question posée au début du paragraphe est étroitement liée à l'étude des anneaux divisés tels que, dans l'une ou l'autre des affirmations ($\wedge$), ($\vee$), on remplace la condition d'être un anneau de valuation par celle d'être un anneau de pseudo-valuation.

DÉFINITION 1.1. - Un idéal premier $\mathfrak{p}$ d'un anneau (intègre) A est appelé ($\uparrow$)-*divisé* [resp., ($\downarrow$)-*divisé*] s'il est divisé et, en outre, $A/\mathfrak{p}$ est un *PVD* [resp., *VD*] et $A_{\mathfrak{p}}$ est un *VD* [resp., *PVD*]. Si $A/\mathfrak{p}$ et $A_{\mathfrak{p}}$ sont tous les deux des *PVDs* et $\mathfrak{p}$ est divisé, alors $\mathfrak{p}$ est dit ($\updownarrow$)-*divisé.*

Il est clair que:

(a) *Si* A *est un anneau qui possède un idéal* ($\updownarrow$)-*divisé* (*donc, en particulier,* ($\uparrow$)-*divisé ou* ($\downarrow$)-*divisé*), *alors* A *est un anneau* (*intègre*) *divisé* (*donc, local*).

(b) *Soit* (A, $\mathfrak{m}$) *un anneau local intègre. Alors, les affirmations suivantes sont équivalentes entre elles*:

(i) A *est un* VD [*resp.,* PVD];

(ii) $\mathfrak{m}$ *est* ($\uparrow$)-*divisé* [*resp.,* ($\downarrow$)-*divisé, ou* ($\updownarrow$)-*divisé*];

(iii) (0) *est* ($\downarrow$)-*divisé* [*resp.,* ($\uparrow$)-*divisé, ou* ($\updownarrow$)-*divisé*].

(c) *Soit* (A, $\mathfrak{m}$) *un anneau local intègre* (*de dimension* ≥ 1). *Alors, les affirmations suivantes sont équivalentes*:

(j) *il existe* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \setminus \{\mathfrak{m}\}$ *tel que* $\mathfrak{p}$ *est* ($\uparrow$)-*divisé*;

(jj) *pour tout* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \setminus \{\mathfrak{m}\}$, $\mathfrak{p}$ *est* ($\uparrow$)-*divisé*;

(jjj) A *est un* PVD.

En vue de la remarque (c), il est naturel de considérer les anneaux du type suivant.

DÉFINITION 1.2. - Un anneau (local intègre) R est appelé *un anneau de pseudo-valuation de type* 1 (en bref, $P^1\,VD$) [resp., *de type* 1 *strict* (en bref, $P_1\,VD$)] s'il existe un idéal premier $\mathfrak{p}$ de R qui est $(\updownarrow)$-divisé [resp., $(\downarrow)$-divisé].

Plus généralement, pour tout $n \geq 0$, l'anneau R est appelé *un anneau de pseudo-valuation de type* n (en bref $P^n\,VD$) [resp., *de type* n *strict* (en bref, $P_n\,VD$)] s'il existe un idéal premier divisé $\mathfrak{p}$ de R tel que $R/\mathfrak{p}$ est un PVD [resp., VD] et $R_{\mathfrak{p}}$ est un $P^{n-1}\,VD$, où, par convention, on pose

$$P^{-1}\,VD \;=\; VD(=P_0\,VD \text{ et } P^0\,VD = PVD)\,.$$

Les implications suivantes sont immédiates:

$$P^{-1}VD{=}VD{=}P_0\,VD \Longrightarrow P^0\,VD{=}PVD \Longrightarrow P_1\,VD \Longrightarrow P^1\,VD \Longrightarrow \ldots$$
$$\ldots \Longrightarrow P_n VD \Longrightarrow P^n\,VD \Longrightarrow P_{n+1}\,VD \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow DD,\ \mathrm{n} \geq 0\,.$$

Il est clair que, dans le cas d'un anneau de dimension finie d, on a que $P^n\,VD = P^{d-1}\,VD$, pour tout $n \geq d-1$.

Nous allons montrer, par la suite, que les implications précédentes ne s'inversent pas, en général.

Tout d'abord, si $F \subset E$ est une extension propre algébrique [resp., transcendante pure] de corps et si X est une indéterminée sur E, alors il est bien connu que $F + XE\,[[X]]$ est un $P^0\,VD$ non intégralement clos [resp., intégralement clos] qui n'est pas un $P_0\,VD$ (cf. par exemple, [15, Cor. 1.4]).

Le résultat suivant permet de construire, à discrétion, des $P^n\,VD$ (ou, des $P_n\,VD$) en utilisant des constructions du type $D + \mathfrak{M}$, d'après Gilmer [16].

THÉORÈME 1.3. - *Soient* A *et* B *deux anneaux locaux intègres et soit* k *le corps résiduel de* A. *Supposons que* k *coïncide avec le corps des fractions de* B *et que* A *soit un* $\mathrm{P_i\,VD}$ *et* B *un* $\mathrm{P^j\,VD}$ [*resp.* $\mathrm{P_j\,VD}$], *alors l'anneau* R *défini par le carré cartésien*:

$$(\square)\qquad \begin{tikzcd} R = A \times_k B \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & B \arrow[d, hook, "v"] \\ A \arrow[r, two heads, "u"] & k \end{tikzcd}$$

(u *et* v *étant les homomorphismes canoniques*) *est un* P^{i+j} VD [*resp.*, P_{i+j} VD]. *En outre, si* $\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \cap \mathrm{R}$ *où* $\mathfrak{m} = \mathrm{Ker}(u)$, *alors* $\mathrm{R}_{\mathfrak{p}} \cong \mathrm{A}$ *et* $\mathrm{R}/\mathfrak{p} \cong \mathrm{B}$.

Réciproquement, si R *est un* P^{n} VD [*resp.*, P_{n} VD], *alors, pour tout* $0 \leq i, j \leq n$ *avec* $i + j = n$, *on peut trouver un idéal premier divisé* $\mathfrak{p}$ *de* R *tel que* $\mathrm{R}_{\mathfrak{p}}$ *est un* P_{i} VD *et* $\mathrm{R}/\mathfrak{p}$ *est un* P^{j} VD [*resp.*, P_{j} VD].

DÉMONSTRATION. (Esquisse). - Dans un carré cartésien du type $(\square)$ si A et B sont divisés alors R est divisé, $R_{\mathfrak{p}} \cong A$ et $R/\mathfrak{p} \cong B$ (cf. [14; Théorème 1.20, p. 24]). En outre, on peut montrer, par récurrence sur j, que si $\mathfrak{Q}$ $(\cong \mathfrak{q}/\mathfrak{p})$ est un idéal premier divisé de $B(\cong R/\mathfrak{p})$ tel que $B/\mathfrak{Q}$ est un *PVD* [resp., *VD*] et $B_{\mathfrak{Q}}$ est un P^{j-1} *VD*, alors $\mathfrak{q}$ est un idéal divisé dans R tel que $R/\mathfrak{q}$ est un *PVD* [resp., *VD*], car $R/\mathfrak{q} \cong B/\mathfrak{Q}$, et $R_{\mathfrak{p}}$ est un P^{i+j-1} *VD*, car les carrés commutatifs suivants:

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & B \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & B/\mathfrak{Q} \arrow[d, hook] \\
R_{\mathfrak{q}} \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & B_{\mathfrak{Q}} \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & k(\mathfrak{Q}) \\
R_{\mathfrak{p}} \cong A \arrow[r, two heads] & k &
\end{tikzcd}$$

sont cartésiens.

Pour montrer l'affirmation réciproque, il suffit de fixer i, $0 \leq i \leq n$, et considérer $j = n - i$. Si $i = n$, alors $j = 0$ et, donc, il suffit de prendre comme $\mathfrak{p}$ l'idéal (0) de R. Si $i < n$, alors on raisonne par récurrence sur n (et j) car, par définition, on peut trouver un idéal premier (divisé) $\mathfrak{p}_0$ dans R tel que le carré commutatif:

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & R/\mathfrak{p}_0 \arrow[d, hook] \\
R_{\mathfrak{p}_0} \arrow[r, two heads] & k(\mathfrak{p}_0)
\end{tikzcd}$$

est cartésien, $R/\mathfrak{p}_0$ est un *PVD* [resp., *VD*] et $R_{\mathfrak{p}_0}$ un P^{n-1} *VD*.

Bien qu'un $P^n\,VD$ ne soit pas en général intégralement clos (voir l'exemple qui suit la Définition 1.2), toutefois:

COROLLAIRE 1.4. - *Avec les mêmes notations et hypothèses du* Théorème 1.3,

(a) R *est intégralement clos si, et seulement si,* A *et* B *sont intégralement clos*;

(b) *Si* A *est intégralement clos et si* B′ *est la clôture intégrale de* B, *alors la clôture intégrale de* R *est isomorphe à* $R' = A \times_k B'$.

DÉMONSTRATION. - Les simples vérifications sont laissées au Lecteur.

Dans toute généralité on peut affirmer qu'un $P^n\,VD$ est toujours seminormal (d'après Traverso [30]). En effet:

COROLLAIRE 1.5. - *Pour tout* $n \geq 0$, *un* $P^n\,VD$ *est un anneau seminormal.*

DÉMONSTRATION. - Pour $n = 0$, le résultat est déjà connu (cf. [15, Prop. 1.10]). Le Théorème 1.3 permet de raisonner par récurrence sur n et, alors, le résultat énoncé découle facilement du lemme suivant.

LEMME 1.6. - *Soit*

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, two heads, "u'"] \arrow[d, hook, "v'"'] & B \arrow[d, hook, "v"] \\ A \arrow[r, two heads, "u"] & k \end{tikzcd}$$

un carré cartésien d'anneaux intègres. Supposons que A *soit un* PVD, *que* $u: A \twoheadrightarrow k$ *soit la projection canonique de* A *sur son corps résiduel et que* k *soit le corps des fractions de* B. *Si* B *est seminormal, alors* R *est aussi seminormal.*

DÉMONSTRATION (Esquisse). - Si $S \hookrightarrow T$ est une extension entière d'anneaux, alors le seminormalisé de S dans T (noté, $\underset{T}{+}S$) est le plus grand sous-anneau S de T contenant S tel que:

grand sous-anneau $\widetilde{S}$ de T contenant S tel que:

(i) pour tout $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(S)$ il existe un unique $\widetilde{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Spec}(\widetilde{S})$ tel que $\widetilde{\mathfrak{p}} \cap S = \mathfrak{p}$;

(ii) l'homomorphisme canonique $k(\mathfrak{p}) \hookrightarrow k(\tilde{\mathfrak{p}})$ est un isomorphisme.

Il est facile de voir que tout sur-anneau de R soit est un sur-anneau de A soit est contenu dans A (cf. aussi [15, Prop. 1.3 (a)]). Pour conclure, il suffit d'appliquer les propriétés de Spec(R) démontrées dans [13, Th. 1.4 et Cor. 1.5].

Avant de donner d'autres applications du Théorème 1.3, nous allons faire une brève pause pour montrer qu'il existe des anneaux divisés seminormaux, qui ne sont pas des $P^n\,VD$, pour tout $n \geq 0$.

*E*XEMPLE 1.7. - Soit K un corps et T une indéterminée sur K. L'anneau $R = K[T^2 - 1,\ T(T^2 - 1)]_{(T^2-1)}$ est l'anneau local (dans l'origine) d'une courbe affine plane ayant dans l'origine un noeud, donc il est seminormal (cf. par exemple [28]). La clôture intégrale de R est $R' = K[T]_{(T-1)} \cap K[T]_{(T+1)}$. Donc, les sur-anneaux de valuation (de dimension 1) de R sont $K[T]_{(T-1)}$ et $K[T]_{(T+1)}$, lesquels ont le même corps résiduel de R, à savoir K. Par conséquence R n'est pas un *PVD* (ni un $P^n\,VD$, pour tout $n \geq 0$, car $P^n\,VD = P^0\,VD$ pour tout $n \geq 0$, R étant un anneau local intègre de dimension 1). Mais, R est trivialement un anneau divisé.

Le résultat suivant est motivé par la recherche, pour les $P^n\,VD$, de l'existence d'une condition analogue à celle qui lie un anneau de pseudo-valuation à son sur-anneau de valuation canoniquement associé (cf. Par. 0).

COROLLAIRE 1.8. - *Si* $(\mathrm{R}, \mathfrak{m})$ *est un* $\mathrm{P}^n\,\mathrm{VD}$ $(n \geq 0)$, *alors il existe toujours un unique sur-anneau* $\tilde{\mathrm{R}}$ *de* R, *tel que* $\mathrm{Spec}(\tilde{\mathrm{R}}) = \mathrm{Spec}(\mathrm{R})$ *et* $\tilde{\mathrm{R}}$ *est un* $\mathrm{P}_n\,\mathrm{VD}$.

DÉMONSTRATION. - Pour éviter le cas trivial, supposons que R n'est pas un $P_n\,VD$. Si $\mathfrak{p}$ est l'idéal premier non maximal divisé de R tel que $R/\mathfrak{p}$ est un *PVD* (mais non un *VD*) et $R_{\mathfrak{p}}$ est un $P^{n-1}\,VD$, alors nous pouvons considérer le sur-anneau de valuation canoniquement associé à $R/\mathfrak{p}$, c.-à-d. $V = (\mathfrak{m}/\mathfrak{p} : \mathfrak{m}/\mathfrak{p})$ (cf. Par. 0). Il est facile de vérifier que l'anneau $\tilde{R} = R_{\mathfrak{p}} \times_{k(\mathfrak{p})} V$ satisfait aux propriétés annoncées.

Le prochain théorème permet de donner une description des $P^n\,VD$, en termes des anneaux de pseudo-valuation (classiques), en montrant, de même, que la classe de tous les $P^n\,VD$, $n \geq 0$, est stable par « composition ».

THÉORÈME 1.9. - *Soit* $(R, \mathfrak{m})$ *un* P^n VD [*resp.*, P_n VD], $n \geq 0$. *On peut trouver* n *idéaux premiers* (*divisés*) *dans* R

$$\mathfrak{p}_0 = (0) \subset \mathfrak{p}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{p}_n \subset \mathfrak{m} = \mathfrak{p}_{n+1}$$

de façon telle que:

$$R \cong R_1^0 \times_{k_1} (R_2^1 \times_{k_2} (\dots (R_{n-1}^{n-2} \times_{k_{n-1}} (R_n^{n-1} \times_{k_n} R_{n+1}^n)) \dots)) \cong$$

$$\cong R_{n+1}^n \times_{k_n} (R_n^{n-1} \times_{k_{n-1}} (\dots (R_2^1 \times_{k_2} R_1^0) \dots))$$

où $R_{i+1}^i = R_{\mathfrak{p}_{i+1}} / \mathfrak{p}_i R_{\mathfrak{p}_{i+1}}$ *est un* PVD *pour* $0 \leq i \leq n$ [*resp.*, *pour* $0 \leq i \leq n-1$ *et* R_{n+1}^n *est un* VD] *et* $k_i = k(\mathfrak{p}_i)$ *pour* $1 \leq i \leq n+1$.

Réciproquement, si $R_1, R_2, \dots, R_{n+1}$ *sont des* PVDs *tels que le corps résiduel* k_i *de* R_i *contient le corps des fractions* F_{i+1} *de* R_{i+1}, *pour* $1 \leq i \leq n$, *alors l'anneau* $R = R_1 \times_{k_1} (R_2 \times_{k_2} (\dots (R_n \times_{k_n} R_{n+1}) \dots))$ *est un* P^n VD. *Si, de plus,* R_{n+1} *est un* VD, *mais non un corps, alors l'anneau* R *est un* P_n VD.

DÉMONSTRATION (Esquisse). - La première partie de l'énoncé découle facilement en considérant le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
R & \twoheadrightarrow & R^1_{n+1} & \twoheadrightarrow & R^2_{n+1} & \twoheadrightarrow & \dots & \twoheadrightarrow & R^{n-2}_{n+1} & \twoheadrightarrow & R^{n-1}_{n+1} & \twoheadrightarrow & R^n_{n+1} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
R^0_n & \twoheadrightarrow & R^1_n & \twoheadrightarrow & R^2_n & \twoheadrightarrow & \dots & \twoheadrightarrow & R^{n-2}_n & \twoheadrightarrow & R^{n-1}_n & \twoheadrightarrow & k_n \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
R^0_{n-1} & \twoheadrightarrow & R^1_{n-1} & \twoheadrightarrow & R^2_{n-1} & \twoheadrightarrow & \dots & \twoheadrightarrow & R^{n-2}_{n-1} & \twoheadrightarrow & k_{n-1} & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \dots & \twoheadrightarrow & k_{n-2} & & & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & & & & & \\
R^0_3 & \twoheadrightarrow & R^1_3 & \twoheadrightarrow & R^2_3 & & \dots & & & & & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & & & & & \\
R^0_2 & \twoheadrightarrow & R^1_2 & \twoheadrightarrow & k_2 & & & & & & & & \\
\downarrow & & \downarrow & & & & & & & & & & \\
R^0_1 & \twoheadrightarrow & k_1 & & & & & & & & & &
\end{array}$$

dans lequel $R_i^j = R_{\mathfrak{p}_i}/\mathfrak{p}_j R_{\mathfrak{p}_i}$ pour $0 \leq j \leq i \leq n+1$ et tous les homomorphismes sont canoniques. En effet, il suffit d'observer que tous les carrés dans le diagramme ci-dessus sont cartésiens.

L'affirmation réciproque peut être facilement vérifiée par récurrence sur n (cf. Théorème 1.3), en se reconduisant (si nécessaire) au cas où le corps résiduel de R_i coincide avec le corps des fractions de R_{i+1}, $1 \leq i \leq n$. (Pour cela il suffit de remplacer R_i par $R'_i = R_i \times_{k_i} F_{i+1}$ $1 \leq i \leq n$).

Nous nous proposons maintenant de trouver, même dans le cas d'un P^n *VD*, sous certaines conditions, un sur-anneau de valuation d'un tel anneau, tel que l'inclusion soit unibranche.

DÉFINITION 1.10. - Soit R un P^n *VD*, $n \geq 0$. Alors, avec les notations du Théorème 1.9, $R = R_1 \times_{k_1} (R_2 \times_{k_2} (\dots (R_n \times_{k_n} R_{n+1})\dots))$ où $(R_i, \mathfrak{m}_i, k_i)$ est un *PVD*, pour tout $1 \leq i \leq n+1$. Soit $(V_i, \mathfrak{m}_i, K_i)$ le sur-anneau de valuation canoniquement associé à R_i (cf. Par. 0). Si, pour tout $1 \leq i \leq n$, $k_i \hookrightarrow K_i$ est une extension algébrique de corps, alors nous dirons que R est *un* P^n VD *algébrique.*

PROPOSITION 1.11. - *Soit* R *un* P^n VD *algébrique,* $\mathrm{n} \geq 0$. *Alors il existe un sur-anneau de valuation* V *de* R *tel que* $\mathrm{R} \hookrightarrow \mathrm{V}$ *est unibranche.*

DÉMONSTRATION (Esquisse). - Avec les notations du Théorème 1.9 et de la Définition 1.10, k_i étant isomorphe au corps des fractions F_{i+1} de R_{i+1} (ou de V_{i+1}), on peut fixer pour $i = n$ un anneau de valuation V_{n+1}^* dans K_n de façon telle que $V_{n+1}^* \cap k_n = V_{n+1}$ et $V_{n+1} \hookrightarrow V_{n+1}^*$ soit unibranche (cf. [16, Th. 16.11 et Th. 17.1]). Soit W_n l'anneau de valuation obtenu par composition de V_{n+1}^* et V_n et soit W_n^* un anneau de valuation dans K_{n-1} tel que $W_n^* \cap k_{n-1} = W_n$ et $W_n \hookrightarrow W_n^*$ soit unibranche. Par récurrence on a le diagramme à la page suivante dans lequel $W_i = V_i \times_{K_i} W_{i+1}^*$, $1 \leq i \leq n$, et $V_{n+1} = W_{n+1}$. Alors, l'anneau W_1 est un sur-anneau de valuation de R tel que $R \hookrightarrow W_1$ est unibranche.

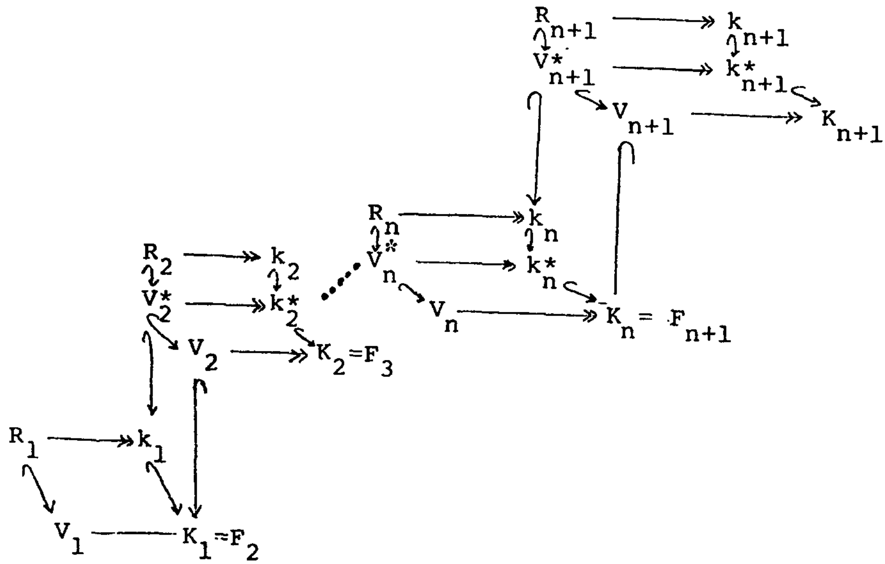
Le résultat précédent peut s'inverser:

THÉORÈME 1.12. - *Soit* $(0) = \mathfrak{P}_0 \subset \mathfrak{P}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{P}_n \subset \mathfrak{P}_{n+1} = \mathfrak{M}$ *une chaîne d'idéaux premiers d'un anneau de valuation* $(\mathrm{V}, \mathfrak{M})$. *Notons par* V_{i+1} *l'anneau de valuation* $\mathrm{V}_{\mathfrak{P}_{i+1}}/\mathfrak{P}_i \mathrm{V}_{\mathfrak{P}_{i+1}}$, $0 \leq \mathrm{i} \leq \mathrm{n}$, *et par* K_{i+1} [*resp.*, F_{i+1} ($= K_i$, *pour* $1 \leq i \leq n$)] *son corps résiduel* [*resp., son corps des fractions*]. *Supposons d'avoir donné pour tout* i, $1 \leq i \leq n+1$, *un sous-corps* k_i *de* K_i, *tel que* K_i *soit algébrique sur* k_i. *Soit* $V^*_{i+1} = V_{i+1} \cap k_i$ *et soit* k^*_{i+1} *le corps résiduel de l'anneau*

$$
\begin{tikzcd}
 & & R_{i+1} \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & \vdots \\
 & & W_{i+1} \arrow[d, hook] & \\
 & & V_{i+1} \arrow[d, hook] & \\
 & R_i \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & k_i \arrow[d, hook] & \\
 & W_i \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & W^*_{i+1} \arrow[d, hook] & \\
 & V_i \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & K_i & \\
\cdots \arrow[r, two heads] & k_{i-1} \arrow[d, hook] & & \\
 & \vdots & &
\end{tikzcd}
$$

de valuation V^*_{i+1}, $0 \leq i \leq n$ (*cf.* [16, Th. 16.11]). *Supposons que* $k_j \subset k^*_j$, *pour* $2 \leq j \leq n+1$. *Alors il existe un* P^n VD *algébrique* R *tel que* $R \hookrightarrow V$ *est unibranche et* $k(\mathbb{P}_i \cap R) \cong k_i$, $1 \leq i \leq n+1$.

DÉMONSTRATION (Esquisse). - Il suffit de considérer les *PVDs* : $R_{i+1} = V^*_{i+1} \times_{k^*_{i+1}} k_{i+1}$, $1 \leq i \leq n$, $R_1 = V_1 \times_{K_1} k_1$. En effet, on a un diagramme commutatif d'homomorphismes canoniques du type suivant:



Alors, l'anneau $R = R_1 \times_{k_1} (R_2 \times_{k_2} (\dots (R_n \times_{k_n} R_{n+1})\dots))$ est un $P^n\,VD$ algébrique satisfaisant aux propriétés annoncées.

Nous allons décrire explicitement quelques exemples de $P^n\,VD$ pour montrer (entre autres) que, en général, $P_{n+1}\,VD \not\Rightarrow P^n\,VD \not\Rightarrow$ $\not\Rightarrow P_n\,VD$.

Exemple 1.13. - Soient F un corps et $\{X_i \mid 0 \leq i \leq n\}$, $\{Y_i \mid 0 \leq i \leq n\}$ deux familles d'indéterminées sur F. Posons:

$$F_{i+1} = F(X_0, X_1, \dots, X_{n-i}, Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-i}),\ 0 \leq i \leq n,\ F_{n+2} = F$$
$$V_{i+1} = F_{i+2}(X_{n-i})\,[Y_{n-i}]_{(Y_{n-i})},\qquad 0 \leq i \leq n,$$
$$K_{i+1} = F_{i+2}(X_{n-i}) = F(X_0, X_1, \dots, X_{n-i}, Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-i-1}),\quad 0 \leq i \leq n.$$

Donc, pour tout i,

$$F_1 \supset \dots \supset F_i \supset K_i \supset F_{i+1} \supset K_{i+1} \supset F_{i+2} \supset \dots \supset F_{n+2} = F$$

et

$$V_{i+1} = K_{i+1} + \mathfrak{M}_{i+1} \quad \text{où} \quad \mathfrak{M}_{i+1} = Y_{n-i}\,V_{i+1}$$

est un anneau de valuation discrète de F_{i+1}. Alors, $R_{i+1} = F_{i+2} +$ $+ \mathfrak{M}_{i+1}$ est un PVD intégralement clos non noethérien 1-dimension-nel, dont le corps des fractions est F_{i+1} et le corps résiduel k_{i+1} coïncide avec F_{i+2}, $0 \leq i \leq n-1$. Il est facile de vérifier que *l'anneau*:

$$(^0) \qquad R = R_1 \times_{k_1} (R_2 \times_{k_2} (\dots (R_n \times_{k_n} V_{n+1}) \dots)) \cong$$
$$\cong K_{n+1} + \mathfrak{M}_{n+1} + \mathfrak{M}_n + \dots + \mathfrak{M}_1$$

est un $\mathrm{P_n}$ VD *de dimension* $\mathrm{n}+1$, *qui n'est pas un* $\mathrm{P^{n-1}}$ VD. En outre, R *est un anneau ouvert* (d'après Papick [26, Sec. 3]), donc aussi un anneau intègre localement *pqr* (d'après Ramaswamy-Viswanathan [27, p. 59]), mais *il n'est pas un* G-*anneau fort* (car, autrement, il serait un anneau de valuation [27, Th. 3.5]). En outre, on peut démontrer que R *est intégralement clos* (cf. Cor. 1.4), mais *non complètement intégralement clos*, car la clôture intégrale complète de R coïncide avec V_1 [16, Lemma 22.5 et Th. 14.5].

Si à la place de V_{n+1} dans $(^0)$ on pose R_{n+1}, c.-à-d. si on considère l'anneau $S = F + \mathfrak{M}_{n+1} + \dots + \mathfrak{M}_1$, alors on voit aussitôt que S *est un* $\mathrm{P^n}$ VD, *de dimension* $\mathrm{n}+1$, *qui n'est pas un* $\mathrm{P_n}$ VD *et qui vérifie les mêmes propriétés que l'anneau* R *ci-dessus*. *Le* P_n *VD* canoniquement associé à S (cf. Corollaire 1.8) est exactement R.

Pour obtenir des exemples de P^n *VDs* algébriques, il suffit de modifier opportunément l'exemple précédent.

EXEMPLE 1.14. - Soit F un corps et $\{X_i \mid 0 \leq i \leq n\}$ une famille d'indéterminées sur F. Posons:

$$F_{i+1} = F(X_0, X_1, \dots, X_{n-i-1}, X^2_{n-i}), \qquad 0 \leq i \leq n;$$
$$K_{i+1} = F(X_0, X_1, \dots, X_{n-i-1}), \quad 0 \leq i \leq n-1, \quad K_{n+1} = F;$$
$$V_{i+1} = K_{i+1}[X^2_{n-i}]_{(X^2_{n-i})} = K_{i+1} + \mathfrak{M}_{i+1}, \ \mathfrak{M}_{i+1} = X^2_{n-i} V_{i+1}, \qquad 0 \leq i \leq n.$$

Donc,

$$F_1 \supset \dots \supset F_{i+1} \supset K_{i+1} \supset F_{i+2} \supset \dots \supset F_{n+1} = F(X^2_0) \supset K_{n+1} = F.$$

On voit aussitôt que le corps de fractions de l'anneau de valuation discrète V_{i+1} est F_{i+1} et que $R_{i+1} = F_{i+2} + \mathfrak{M}_{i+1}$, $0 \leq i \leq n-1$, est un *PVD* noethérien, car son corps résiduel $k_{i+1} = F_{i+2}$ est tel que $k_{i+1} \hookrightarrow K_{i+1}$ est une extension finie [15, Cor. 1.6]. *L'anneau*:

$$(^0) \qquad R = R_1 \times_{k_1} (R_2 \times_{k_2} (\dots (R_n \times_{k_n} V_{n+1}) \dots)) \cong$$
$$\cong F + \mathfrak{M}_{n+1} + \mathfrak{M}_n + \dots + \mathfrak{M}_1$$

est un $\mathrm{P_n}$ VD *algébrique de dimension* $\mathrm{n}+1$ (*qui n'est pas un* $\mathrm{P^{n-1}}$ VD). Si $T_{i+1}=K_{i+1}\,[X_{n-i}]_{(X_{n-i})}$, $1\leq i\leq n$, alors

$$V=V_1\times_{K_1}(T_2\times_{K_2}(\dots(T_n\times_{K_n}T_{n+1})\dots))$$

est un sur-anneau de valuation de R tel quel $R\hookrightarrow V$ est unibranche.

Si, en outre, $E\hookrightarrow F$ est une extension propre algébrique de corps et $R_{n+1}=E+\mathfrak{M}_{n+1}$, alors en remplaçant V_{n+1} par R_{n+1} dans (^{0}), nous obtenons *un* $\mathrm{P^n}$VD *algébrique, de dimension* $\mathrm{n}+1$, *qui n'est pas un* $\mathrm{P_n}$ VD.

EXEMPLE 1.15. - Il est clair que si on donne arbitrairement des entiers $n\geq 0$, $d_1, d_2, \dots, d_{n+1}\geq 0$ et si on pose $d=d_1+d_2+\dots+d_{n+1}$, alors il est possible de construire explicitement un P^n *VD* de dimension d tel que, si

$$R=R_1\times_{k_1}(\dots(R_n\times_{k_n}R_{n+1})\dots)$$

est sa décomposition canonique en *PVDs* (cf. Théorème 1.9), alors $\dim(R_i)=d_i$, $1\leq i\leq n+1$. En effet, il suffit de donner une famille de $n+1$ anneaux de valuation $\{(V_i, \mathfrak{M}_i, K_i)\mid \mathrm{i}\leq i\leq n+1\}$ avec $\dim(V_i)=d_i$ et une famille de corps $\{k_i\mid 1\leq i\leq n+1\}$ de façon telle que

$$F_{i+1}\hookrightarrow k_i\hookrightarrow K_i,\ 1\leq i\leq n,\ k_{n+1}\hookrightarrow K_{n+1}$$

F_i étant le corps de fractions de V_i.

Alors, si $T_i=V_i\times_{K_i}k_i$, l'anneau:

$$R=T_1\times_{k_1}(\dots(T_n\times_{k_n}T_{n+1})\dots)$$

est un P^n *VD* du type voulu.

Il est clair aussi que, pour tout entier e, $0\leq e\leq n+1$, on peut faire ainsi que *l'anneau* R *soit un* $\mathrm{P^n}$ VD *algébrique de type* e, c'est-à-dire que exactement e, parmi les $n+1$ extensions $F_{i+1}\hookrightarrow K_i$, $1\leq i\leq n$, et $k_{n+1}\hookrightarrow K_{n+1}$, sont algébriques, tandis que les autres $(n+1)-e$ sont transcendentes pures

Le résultat suivant est motivé par la recherche d'une description « interne » (c.-à-d. qui fait appel seulement aux propriétés algébriques des éléments) d'un P^n *VD*. A ce propos, rappelons qu'une telle description existe pour les *PVDs*. En effet, si R est un anneau intègre et K est son corps des fractions, alors R est un *PVD* si, seulement si, pour tout $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$,

$$xy \in \mathfrak{p},\ x,\ y \in K,\ x \notin \mathfrak{p} \Longrightarrow y \in \mathfrak{p}$$

(cf. [19, Sec. 1]). Plus généralement, rappelons la définition suivante: si R est un sous-anneau d'un anneau S, alors $R \hookrightarrow S$ est dite une *extension forte* si, pour tout $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$,

$$xy \in \mathfrak{p},\ x, y \in S,\ x \notin \mathfrak{p} \Longrightarrow y \in \mathfrak{p}.$$

Une étude systématique de telles extensions a été développée dans [11].

PROPOSITION 1.16. - *Soit* $(\mathrm{R}, \mathfrak{m})$ *un anneau local intègre. Alors,* R *est un* P^n VD *si, et seulement si, il existe une chaîne d'idéaux premiers dans* R:

$$(0) \subset \mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2 \subset \dots \subset \mathfrak{p}_n \subset \mathfrak{m}$$

de façon telle que la suite d'homorphismes canoniques

$$R \overset{\Phi_n}{\hookrightarrow} R_{\mathfrak{p}_n} \overset{\Phi_{n-1}}{\hookrightarrow} R_{\mathfrak{p}_{n-1}} \hookrightarrow \dots \hookrightarrow R_{\mathfrak{p}_2} \overset{\Phi_1}{\hookrightarrow} R_{\mathfrak{p}_1} \overset{\Phi_0}{\hookrightarrow} K$$

est composée par des extensions fortes.

DÉMONSTRATION. - On sait que si $\mathfrak{P}$ est un idéal premier dans un anneau intègre A, l'homomorphisme canonique $A \hookrightarrow A_{\mathfrak{P}}$ est une extension forte si, et seulement si, $\mathfrak{P}$ est divisé et $A/\mathfrak{P}$ est un *PVD* [11, Th. 2.3]. La conclusion découle aisément du Théorème 1.9.

2. - CATENARIÉTÉ ET DIMENSION DES ANNEAUX DE POLYNÔMES À COEFFICIENTS DANS UN P^n *VD*.

Un anneau A est dit *catenaire* si, pour tout couple d'idéaux premiers $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ dans A, la longueur de chaque chaîne saturée d'idéaux premiers entre $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$ est finie et constante.

Il est bien connu que si A est un anneau de valuation de dimension finie d, alors $\dim(A[X]) = d + 1$ (cf. [3; Th. 3, 4 p. 507-508] ou [22, Th. 68]) et $A[X]$ est catenaire (cf. [5, Cor. 1]). Signalons, en passant, que Bouvier-Contessa-Ribenboïm [1] [5] ont montré que

[1] Pour une démonstration directe voir aussi A. Bouvier - F. Burq - G. Germain, « Un exemple d'anneau catenaire », Publ. Dép. Math Lyon *17* (1980), 1-5.

la même conclusion est valable, plus généralement, si A est un anneau intègre de Bézout de dimension finie. Plus récemment (et encore plus généralement) de Souza Doering-Lequain [7] ont prouvé la catenariété de l'anneau de polynômes à coefficients dans un anneau intègre de Prüfer de dimension finie. Si A est un PVD de dimension finie d et si V est le sur-anneau de valuation canoniquement associé à A, alors, compte tenu de [5] et [20, Rk. 2.6], on peut affirmer que $A[X]$ est catenaire si, et seulement si, la clôture intégrale de A coïncide avec V. Dans ce cas $\dim(A[X]) = d + 1$, tandis qu'en général $\dim(A[X]) = d + 2$.

Dans ce paragraphe, nous nous proposons d'étudier la catenariété et la dimension de l'anneau $A[X]$ dans le cas où A est un $P^n VD$, $n \geq 1$.

THÉORÈME 2.1. - *Soient donnés deux entiers* d, e *avec* $\mathrm{d} \geq \mathrm{e} \geq 0$. *Soit* R *un* $\mathrm{P^n VD}$ *de dimension* d. *Alors* $\dim(\mathrm{R}[\mathrm{X}]) = \mathrm{d} + \mathrm{e} + 1$ *si, et seulement si,* R *est de type algébrique* $\bar{\mathrm{e}} = \mathrm{n} + 1 - \mathrm{e}$, *avec* $0 \leq \mathrm{e} \leq \mathrm{n} + 1 \leq \mathrm{d}$.

DÉMONSTRATION. - (Esquisse). Notre preuve se fait par récurrence sur d (et e).

Si $d = e = 0$, alors R est un corps et l'énoncé est trivial.

Supposons $d = 1$ (donc, $P^n VD = PVD$ pour tout $n \geq 0$). Alors, $\dim(R[X]) = 2$ [resp., 3] si, et seulement si, R est un PVD algébrique [resp., un PVD qui n'est pas algébrique] (cf. [20; Th. 2.5 et Rk. 2.6]).

Par récurrence, supposons que $d \gneq 1$ et que l'énoncé soit vrai pour tout $P^m VD$ de dimension $\leq d - 1$. Nous savons que R peut être obtenu comme produit fibré:

$$(\square) \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{R} \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & \mathrm{B} \arrow[d, hook] \\ \mathrm{A} \arrow[r, two heads] & \mathrm{k} \end{tikzcd}$$

où A [resp., B] est un $P^{n-1}VD$ [resp., PVD] de dimension $d' \leq d - 1$ [resp., $d'' \geq 1$] et de type algébrique $\bar{e}' = (n - 1) + 1 - e'$ (où $n > e'$) [resp., $\bar{e}'' = 1 - e''$ (où $0 \leq e'' \leq 1$)], le corps k, corps résiduel de A, est isomorphe au corps des fractions de B et $d = d' + d''$, $e = e' + e''$. En tensorisant le diagramme $(\square)$ par $- \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[X]$, il n'est pas trop difficile de montrer que le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc} R[X] & \twoheadrightarrow & B[X] \\ \downarrow & & \downarrow \\ A[X] & \twoheadrightarrow & k[X] \end{array}$$

est encore un carré cartésien et que:

$$\dim(R[X]) = \dim(A[X]) + \dim(B[X]) - \dim(k[X])$$

(cf. aussi [13, Sec. 1]). Par l'hypothèse de récurrence,

$$\dim(A[X]) = d' + 1 + e'$$
$$\dim(B[X]) = d'' + 1 + e''$$

donc, en conclusion,

$$\dim(R[X]) = d' + 1 + e' + d'' + 1 + e'' - 1 = d + e + 1 .$$

Pour tout $d \geq e \geq 0$, compte tenu du Théorème précédent, l'Exemple 1.15 permet de donner explicitement un anneau (de type $P^n\,VD$) tel que:

$$\dim(R) = d \quad \text{et} \quad \dim(R[X]) = d + e + 1.$$

Pour terminer, nous allons étudier le comportement des anneaux de polynômes, à coefficients dans un $P^n\,VD$, par rapport à la propriété de catenariété.

THÉORÈME 2.2. - *Soit* R *un* $\mathrm{P^n\,VD}$ *de dimension d. Alors,* R[X] *est catenaire si, et seulement si,* R *est algébrique* (*ou, de façon équivalente,* $\dim(\mathrm{R[X]}) = \mathrm{d} + 1$, *cf.* Th. 2.1).

DÉMONSTRATION. (Esquisse). - Montrons que si R n'est pas un $P^n\,VD$ algébrique, $R[X]$ ne peut pas être catenaire.

Soit

$$\mathfrak{p}_0 = (0) \subset \mathfrak{p}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_i \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_n \subset \mathfrak{p}_{n+1} = \mathfrak{m}$$

la chaîne d'idéaux premiers divisés qui permet de décomposer R dans un produit fibré de $PVDs$ (cf. Théorème 1.9):

$$R = R_1^0 \times_{k_1} (R_2^1 \times_{k_2} (\ldots (R_n^{n-1} \times_{k_n} R_{n+1}^n) \ldots)) .$$

Notons par $(V_i, \mathfrak{m}_i, K_i)$ le sur-anneau de valuation canoniquement associé au *PVD*, R_i^{i-1}, $1 \leq i \leq n+1$. Supposons que $k_i = \mathfrak{k}(\mathfrak{p}_i) \hookrightarrow K_i$ ne soit pas une extension algébrique, alors $R_i^{i-1}[X]$ n'est pas un anneau catenaire (cf. [20, Rk. 2.6] et aussi Exemple 2.3). En effet, il existe des idéaux premiers $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{Q}_2$, $\mathfrak{M}$ dans l'anneau $R_i^{i-1}[X]$ de façon telle que

$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{M} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\mathfrak{P} & & \mathfrak{Q}_2 \arrow[d, dash] \\
 & & \mathfrak{Q}_1 \\
 & \mathfrak{Q} \arrow[uul, dash] \arrow[ur, dash] &
\end{tikzcd}$$

sont des chaînes saturées d' idéaux premiers d' inégales longueurs. Donc, si on considère la pré-image dans $R[X]$, par l'homomorphisme canonique $\Phi : R[X] \to R_i^{i-1}[X]$, du diagramme d'inclusions ci-dessus, alors on trouve dans $R[X]$ encore des chaînes d'idéaux premiers saturées d'inégales longueurs. Par conséquent, $R[X]$ n'est pas catenaire.

Réciproquement, on suppose R algébrique. La preuve se fait par récurrence sur d, le cas $d = 1$ étant connu (pour les *PVDs*). Si $d > 1$, alors à l'aide du Théorème 1.3, on peut se reconduire au cas où $R = A \times_k B$ où A est un *PVD* de dimension 1 et B est un P^{n-1} *VD* de dimension $d - 1$. La conclusion découle du fait que $R[X] \cong$ $\cong A[X] \times_{k[X]} B[X]$ et de quelques remarques (2) sur le « recollement » des relations d'ordre ($=$ inclusion ensembliste) dans $\mathrm{Spec}(R[X] \cong \mathrm{Spec}(A[X]) \coprod_{\mathrm{Spec}(k[X])} \mathrm{Spec}(B[X])$ [13, Th. 1.4].

Finalement, nous voulons examiner, dans le détail, un simple (et classique) exemple pour aider le Lecteur à mieux comprendre quel genre de phénomène se déclenche dans le passage du cas algébrique au cas transcendent pur, et qui vient attaquer la propriété de catenariété de l'anneau des polynômes à coefficients dans un P^n *VD*.

---

(2) Des détails ultérieurs apparaîtront dans un papier en collaboration avec A. Bouvier.

EXEMPLE 2.3 (Krull [23], Seidenberg [29]). - Soient k un corps et X, Y, T, trois indéterminées sur k. Considérons:

$$V = k(X)\,[Y]_{(Y)} = k(X) + \mathfrak{m} \quad \text{où} \quad \mathfrak{m} = YV = Yk(X)\,[Y]_{(Y)}$$

$$R = k + \mathfrak{m}\,, \quad F = k(X, Y)\,.$$

Il est bien connu que R est un *PVD* de dimension 1 intégralement clos et V est le sur-anneau de valuation (dans F), canoniquement associé à R. En outre, on sait que $V[T]$ est un anneau catenaire de dimension 2 [29; Th. 4, p. 508]. Nous voulons montrer que R[T] *est un anneau de dimension* 3 *qui n'est pas catenaire.* Pour cela il suffit de remarquer que $\dim(R[T]) \leq 2\dim(A) + 1 = 3$ et qu'au diagramme commutatif d'homomorphismes canoniques surjectifs d'anneaux intègres:

$$\begin{tikzcd}
 & R[T] \arrow[dl, "\psi_1"'] \arrow[dr, "\phi_1"] & \\
R \arrow[ddr, "\psi_2"'] & & R[X] \arrow[d, "\phi_2"] \\
 & & k[X] \arrow[dl, "\phi_3"] \\
 & k &
\end{tikzcd}$$

(où $\psi_1 : T \mapsto 0$, $\psi_2 : Y \mapsto 0$, $\varphi_1 : T \mapsto X$, $\varphi_2 : Y \mapsto 0$, $\varphi_3 : X \mapsto 0$)
sont associées deux chaînes saturées d'idéaux premiers de $R[T]$:

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
 & \mathbb{M} = \operatorname{Ker}(\psi_2 \circ \psi_1) = \operatorname{Ker}(\phi_3 \circ \phi_2 \circ \phi_1) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\mathbb{P} = \operatorname{Ker}(\psi_2) \arrow[ddr] & & \operatorname{Ker}(\phi_2 \circ \phi_1) = \mathbb{Q}_2 \arrow[d] \\
 & & \operatorname{Ker}(\phi_1) = \mathbb{Q}_1 \arrow[dl] \\
 & (0) &
\end{tikzcd}$$

Mais, pour pénétrer à fond cet exemple, il est intéressant de donner les « générateurs » des idéaux premiers qui paraissent dans le diagramme précédent. Il est facile de voir que:

$$\mathfrak{M} = (\mathfrak{m}, T), \quad \mathfrak{P} = (T), \quad \mathfrak{Q}_2 = \mathfrak{m}\,[T]$$

et que:

$$(0) \underset{\neq}{\subset} \mathfrak{Q}_1 = (YT - YX)\, F[T] \cap R[T] \underset{\neq}{\subset} \mathfrak{Q}_2$$

(tandis que $(YT - YX)\, F[T] \cap V[T] = (T - X)\, V[T] \not\subseteq \mathfrak{m}\,[T]$).

SUMMARY. — We introduce the pseudo-valuation domains of type n (briefly, $P^n VD$), for every $n \geq 0$. They are special divided domains (cf. Akiba [1], Dobbs [8]) and generalize the « classical » pseudo-valuation domains (cf. Hedstrom-Houston [19]). We prove several properties concerning these domains: e.g. every $P^n VD$ is seminormal, but in general not normal; every $P^n VD$ can be constructed by a sequence of pull-backs, preserving the flavour of the composition of valuation rings (cf. Nagata [25, p. 35]). The main results of the present paper are the following: (a) a characterization of the $P^n VDs$ A such that the polynomial ring $A[X]$ is catenarian; (b) an *explicit* construction of a class of integral domains (in fact, $P^n VDs$) R such that, for every $d \geq e \geq 0$, $\dim(R) = d$ and $\dim(R[X]) = d + e + 1$ (cf. Seidenberg [29]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] AKIBA T., *A Note on AV-domains.* Bull. Kyoto Ed., Ser. B *31* (1967), 1-3.

[2] ANDERSON D. F., *Comparability of ideals and valuation overrings.* Houston J. Math. *5* (1979), 451-463.

[3] ANDERSON D. F. - DOBBS D. E., *Pair of rings with the same prime ideals.* Canad. J. Math. *32* (1980), 362-384.

[4] BOISEN M. P. - SHELDON P. B., *CPI-extensions: overrings of integral domains with special prime spectrum.* Canad. J. Math. *29* (1977), 722-737.

[5] BOUVIER A. - CONTESSA M. - RIBENBOIM P., *On chains of prime ideals in polynomial rings.* C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada *3* (1981), 87-92.

[6] DAVIS E. D., *Integrally closed pairs.* Springer Lect. Notes *311* (1973), 103-106.

[7] DE SOUZA DOERING A. M. - LEQUAIN Y., *Chains of prime ideals in polynomial rings.* Preprint 1981.

[8] DOBBS D. E., *Dividedrings and going-down.* Pac. J. Math. *67* (1976), 353-363.

[9] DOBBS D. E., *On locally divided integral domains and CPI-overrings.* Intern. J. Math. & Math. Sciences *4* (1981), 119-135.

[10] DOBBS D. E. - FONTANA M., *Pseudo-valuation domains and their globalizations.* Meeting on « Commutative Algebra », Trento 1981.

[11] DOBBS D. E. - FONTANA M. - HUCKABA J. A. - PAPICK I. J., *Strong ring extensions and pseudo-valuation domains.* Houston J. Math. (to appear).
[12] DOBBS D. E. - PAPICK I. J., *Going-down: a survey.* Nieuw Arch. Wisk. *26* (1978), 255-291.
[13] FONTANA M., *Topologically defined classes of commutative rings.* Annali Mat. Pura Appl. *123* (1980), 331-355.
[14] FONTANA M., *Carrés cartésiens, anneaux divisés et anneaux localement divisés.* Pre-publ. Math. Université Paris-Nord, Fasc. *21*, 1980.
[15] FONTANA M., *Carrés cartésiens et anneaux de pseudo-valuation.* Publ. Dép. Math. Lyon, *17* (1981), 57-95.
[16] GILMER R. W., *Multiplicative ideal theory.* Queen's University, Kingston, 1968.
[17] GREENBERG B., *Global dimension of cartesian squares.* J. Algebra *32* (1974), 31-43.
[18] GREENBERG B., *Coherence in cartesian squares.* J. Algebra *50* (1978), 12-25.
[19] HEDSTROM J. R. - HOUSTON E. G., *Pseudo-valuation domains.* Pac. J. Math. *75* (1978), 137-147.
[20] HEDSTROM J. R. - HOUSTON E. G., *Pseudo-valuation domains, II.* Houston J. Math. *4* (1978), 199-207.
[21] JAFFARD P., *Théorie de la dimension dans les anneaux de polynômes.* Gauthier-Villars, Paris, 1960.
[22] KAPLANSKY I., *Commutative rings.* Allyn-Bacon, Boston 1970. Rev. Ed., Univ. Chicago Press, 1974.
[23] KRULL W., *Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsberichte II.* Math. Z. *41* (1936), 665-679.
[24] MCADAM S., *Simple going-down.* J. London Math. Soc. *13* (1976), 167-173.
[25] NAGATA M., *Local rings.* Interscience, New York 1962.
[26] PAPICK I. J., *Topologically defined classes of going-down rings.* Trans. AMS *219* (1976), 1-37.
[27] RAMASWAMY R. - VISWANATHAN T. M., *Overring properties of G-domains.* Proc. AMS *58* (1976), 59-67.
[28] SALMON P., *Singolarità e gruppo di Picard.* Symposia Mathematica II, 341-355. Academic Press, New York 1969.
[29] SEIDENBERG A., *A note on dimension theory of rings; On the dimension theory of rings (II).* Pac. J. Math. *3* (1952), 505-512 and 603-614.
[30] TRAVERSO C., *Seminormality and Picard group.* Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa *24* (1970), 585-595.
[31] VASCONCELOS W. V., *The local rings of global dimension two.* Proc. AMS *35* (1972), 381-386.