Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2006/2007
AL1 - Algebra 1, fondamenti
Seconda prova di valutazione intermedia
11 Gennaio 2006

*Cognome*_________________ *Nome*_________________

*Numero di matricola*_________________________

Avvertenza: Svolgere il maggior numero di esercizi nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e giustificando tutte le affermazioni fatte. Non è consentito l'uso di libri, appunti e calcolatrici.

Esercizio 1. Determinare la decomposizione in cicli disgiunti, l'ordine e la parità delle seguenti permutazioni di S_9:
$\sigma = (2345) \circ (35) \circ (479) \circ (218)$;
$\tau = (48) \circ (23) \circ (267) \circ (436) \circ (2357)$

Esercizio 2. Risolvere il seguente sistema di congruenze lineari:

$$\begin{cases} 2X \equiv 10 \pmod{14} \\ 6X \equiv 8 \pmod{22} \end{cases}$$

Stabilire inoltre in quante classi modulo 308 si ripartiscono le soluzioni.

Esercizio 3. Determinare quanti sono gli elementi invertibili di $\mathbb{Z}_{169}$. Stabilire se le classi di 12 e 13 sono invertibili in $\mathbb{Z}_{169}$ e in caso affermativo determinare le loro classi inverse, illustrando il procedimento seguito.

Esercizio 4. Determinare la classe di polinomi associati a 53750 in $\mathbb{Z}[X]$ e in $\mathbb{Q}[X]$.

Esercizio 5. Dati i polinomi

$$f(X) = X^4 + X^3 + \overline{3}X^2 + \overline{2}X + \overline{2}\,; \quad g(X) = X^3 + \overline{2}X^2 + \overline{2}X + \overline{1}$$

di $\mathbb{Z}_5[X]$, determinare, con l'algoritmo euclideo delle divisioni successive, il massimo comune divisore monico di $f(X)$ e $g(X)$ e un'identità di Bezout per esso.

Esercizio 6. Determinare le radici razionali del polinomio

$$f(X) = 2X^4 - 5X^3 + 4X^2 - 5X + 2.$$

Determinare poi i fattori irriducibili di $f(X)$ in $\mathbb{Z}[X], \mathbb{Q}[X], \mathbb{R}[X], \mathbb{C}[X]$.

Esercizio 7. Sia $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false, motivando brevemente le risposte:

(a) L'anello $\mathbb{Z}_n$ è un campo per ogni $n \geq 2$.
(b) Se p è un numero primo e p non divide il prodotto ab, con $a, b \in \mathbb{Z}$, allora p non divide né a né b.

Sia $f(X)$ un polinomio a coefficienti interi:

(c) Se $f(X)$ non ha radici intere allora non ha fattori di primo grado in $\mathbb{Z}[X]$.
(d) Se $f(X)$ ha un fattore proprio in $\mathbb{Z}[X]$ allora ha un fattore proprio in $\mathbb{Q}[X]$.
(e) Se $f(X)$ ha un fattore proprio in $\mathbb{Q}[X]$ allora ha un fattore proprio in $\mathbb{Z}[X]$.
(f) Se $f(X)$ è primitivo, allora ogni suo fattore in $\mathbb{Z}[X]$ è primitivo.